Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Metody rekurencyjne i programowanie dynamiczne 28.01.2013

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Klient w chwili $t = 0$ otrzymuje kredyt w wysokości k_0. Klient spłaca kredyt w równych ratach kapitałowo-odsetkowych w wysokości $s > 0$. Stopy procentowe w kolejnych okresach są zapisane w kontrakcie i wynoszą $r_1, r_2, \ldots, r_t > 0$.

(a) [*2 p*] Wyprowadzić równanie rekurencyjne opisujące zachowanie się pozostałego kapitału do spłaty.

(b) [*4 p*] Jak wysokie raty s musi spłacać konsument aby być w stanie spłacić kredyt? *Proszę nie wyprowadzać postaci zwartej otrzymanego wyrażenia.*

Rozwiązanie.

(a) Poszukiwane równanie rekurencyjne jest standardowe. Mamy

$$\begin{array}{ll}
\text{w chwili } t = 0 & k_0 \\
\text{w chwili } t = 1 & k_1 = (1+r_1)k_0 - s \\
\text{w chwili } t = 2 & k_2 = (1+r_2)k_1 - s = (1+r_2)(1+r_1)k_0 - (1+r_2)s - s \\
\text{w chwili } t = 3 & k_3 = (1+r_3)(1+r_2)(1+r_1)k_0 - (1+r_3)(1+r_2)s - (1+r_3)s - s
\end{array}$$

o ogólnie w chwili t zachodzi

$$k_t = (1+r_t)\cdot\ldots\cdot(1+r_1)k_0 - s - (1+r_t)s - \ldots - (1+r_t)\cdot\ldots\cdot(1+r_2)s.$$

Powyższy wzór można zapisać w następującej wygodniejszej postaci

$$k_t = \prod_{\ell=1}^{t}(1+r_\ell)k_0 - s\left(1 + \sum_{\ell=2}^{\ell=t}\prod_{s=\ell}^{s=t}(1+r_s).\right) \tag{1}$$

(b) Klient spłaci kredyt jeżeli ciąg k_t będzie malejący a więc wystarczy tak dobrać s aby zachodził warunek $k_t - k_{t+1} > 0$. Daje to następujący warunek na wielkość raty

$$\begin{aligned}
k_t - k_{t+1} &= \prod_{\ell=1}^{t}(1+r_\ell)k_0 - s\left(1 + \sum_{\ell=2}^{\ell=t}\prod_{s=\ell}^{s=t}(1+r_s).\right) - \left[\prod_{\ell=1}^{t+1}(1+r_\ell)k_0 - s\left(1 + \sum_{\ell=2}^{\ell=t+1}\prod_{s=\ell}^{s=t+1}(1+r_s).\right)\right] \\
&= k_0\prod_{\ell=1}^{t}(1+r_\ell)r_{t+1} + s\left(\sum_{\ell=2}^{t+1}\prod_{s=\ell}^{t+1}(1+r_s) - \sum_{\ell=2}^{t}\prod_{s=\ell}^{t}(1+r_s)\right) > 0
\end{aligned}$$

skąd otrzymujemy warunek

$$s > \frac{k_0\prod_{\ell=1}^{t}(1+r_\ell)r_{t+1}}{\left(\sum_{\ell=2}^{t}\prod_{s=\ell}^{t}(1+r_s) - \sum_{\ell=2}^{t+1}\prod_{s=\ell}^{t+1}(1+r_s)\right)}.$$

Zadanie 2 Dane jest równanie liniowe o stałych współczynnikach postaci

$$x_{t+3} - \frac{13}{12}x_{t+2} + \frac{3}{8}x_{t+1} - \frac{1}{24}x_t = 1.$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne (rzeczywiste) powyższego równania.

Rozwiązanie.

(a) Wielomian charakterystyczny powyższego równania jest postaci

$$w(m) = m^3 - \frac{13\,m^2}{12} + \frac{3\,m}{8} - \frac{1}{24}.$$

Pierwiastki są postaci

$$m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{4}, m_3 = \frac{1}{3}$$

skąd rozwiązanie równania jednorodnego jest postaci

$$x_t = C_1\frac{1}{2^t} + C_2\frac{1}{3^t} + C_3\frac{1}{4^t}.$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego stosujemy metodę nieoznaczonych współczynników gdzie funkcja testowa jest postaci $u_t = a$. Wstawiając ją do równania otrzymujemy

$$\frac{a}{4} = 1$$

skąd rozwiązanie ogólne jest postaci

$$x_t = C_1\frac{1}{2^t} + C_2\frac{1}{3^t} + C_3\frac{1}{4^t} + 4.$$

Zadanie 3 Dany jest układ równań rekurencyjnych postaci

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{14} & -\frac{5}{28} \\ -\frac{10}{21} & \frac{8}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{29}{28} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(a) [*5 p*] Znaleźć rozwiązanie ogólne. *Rozwiązanie można pozostawić w postaci iloczynu macierzy.*

(b)[*1 p*] Do czego zbiega x_t przy $t \to \infty$?

Rozwiązanie.

(a) W pierwszej kolejności znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy współczynników. Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(\lambda) = \left(-\lambda - \frac{3}{14}\right)\left(\frac{8}{21} - \lambda\right) - \frac{25}{294} = \frac{(2\,\lambda - 1)\,(3\,\lambda + 1)}{6}$$

skąd wartości własne to $\lambda_1 = -1/3$ i $\lambda_2 = 1/2$. Odpowiadające im wektory własne obliczamy w standardowy sposób przyjmując

$$h_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Równowaga $\bar{x}$ jest postaci

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie jest zatem postaci

$$\begin{aligned} x_t &= H \begin{bmatrix} 1/(-3)^t & 0 \\ 0 & 1/2^t \end{bmatrix} H^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \bar{x} \right) + \bar{x} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/(-3)^t & 0 \\ 0 & 1/2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Ponieważ wartości własne macierzy A są co do modułu mniejsze niż 1 więc równowaga $\bar{x}$ jest globalnie stabilna i konsekwentnie $x_t \to -1$ dla $t \to \infty$.

Zadanie 4 Dane jest następujące zagadnienie optymalizacji dynamicznej ze skończonym horyzontem

$$\max_{\langle u_t \rangle} \sum_{t=0}^{T-1} -\alpha u_t x_t + \log(x_T), \qquad \text{gdzie równanie ruchu jest postaci } x_{t+1} = x_t(1 + x_t u_t)$$

i dodatkowo zakładamy, że $u_t > 0$, $x_t > 0$ i $\alpha \in (0, 1)$, $x_0 > 0$ są zadanymi parametrami zadania.

(a) [*6 p*] Podać funkcję wartości $J_0(x)$, $x > 0$.

Rozwiązanie.

(a) Korzystamy z twierdzenia Bellmana. Dla czasu T mamy

$$J_T(x) = \log(x)$$

ponieważ nie zależy to od sterowania.

Dla chwili $T - 1$ otrzymujemy

$$J_{T-1}(x) = \max_u \log\left(x\ (u\,x + 1)\right) - \alpha\, u\, x.$$

Powyższa funkcja jest wklęsła więc rozważamy tylko warunki pierwszego rzędu otrzymując

$$\frac{x}{u\,x + 1} - \alpha\, x = 0 \quad \text{skąd } u = -\frac{\alpha - 1}{\alpha\, x}$$

co daje nam funkcję wartości postaci

$$J_{T-1}(x) = \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha - 1.$$

Dla chwili $T - 2$ mamy

$$J_{T-2}(x) = \log\left(\frac{x\ (u\,x + 1)}{\alpha}\right) - \alpha\, u\, x + \alpha - 1.$$

Podobnie jak poprzednio rozważamy warunki pierwszego rzędu otrzymując

$$\frac{x}{u\,x + 1} - \alpha\, x = 0 \quad \text{skąd } u = -\frac{\alpha - 1}{\alpha\, x}$$

co daje nam funkcję wartości postaci

$$J_{T-2}(x) = \log\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + 2\,\alpha - 2.$$

Kontynuując otrzymujemy

$$J_{T-k}(x) = \log\left(\frac{x}{\alpha^k}\right) + k(\alpha - 1)$$

skąd podstawiając $t = T - k$ otrzymujemy

$$J_t(x) = \log\left(\frac{x}{\alpha^{T-t}}\right) + (T - t)(\alpha - 1).$$

Zadanie 5 Rozważam następujące zagadnienia optymalizacji dynamicznej w nieskończonym horyzoncie

$$\max_{\langle u_t \rangle} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t \sqrt{u_t x_t}, \quad \text{z równaniem ruchu postaci } x_{t+1} = \frac{3}{2}(1-u_t)x_t,$$

gdzie $u_t \in (0,1)$ i $x_t > 0$. Wiemy, że funkcja wartości dla tego zagadnienia jest postaci $J(x) = A\sqrt{x}$.

(a) [*6 p*] Znaleźć stałą A.

Rozwiązanie.

(a) Aby znaleźć stałą A wystarcza wstawić postulowaną funkcję wartości J do równania Bellmana i odpowiednio dobrać stałą A. Wstawiając postulowaną funkcję wartości do równania Bellmana otrzymujemy

$$A\sqrt{x} = \max_{u \in (0,1)} \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{1-u}\,\sqrt{x}\,A}{2^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{u}\,\sqrt{x}.$$

Maksymalizowana funkcja po prawej stronie powyższego równania jest postaci

$$h(u) = a\sqrt{u} + b\sqrt{1-u}.$$

Jest to funkcja określona na odcinku $(0,1)$, wklęsła, która przyjmuje wartość maksymalną w punkcie

$$u^* = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Korzystając z tego wiemy, że prawa strona równania Bellmana jest ostatecznie postaci

$$\frac{\sqrt{x}\,\sqrt{3\,A^2+8}}{2^{\frac{3}{2}}}.$$

Otrzymujemy zatem ostatecznie równanie postaci

$$A\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{3\,A^2+8}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

skąd wyznaczamy

$$A = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}}.$$