Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Metody rekurencyjne i programowanie dynamiczne 18.01.2013

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Niech Y_t oznacza produkcję, K_t kapitał, S_t oszczędności, I_t inwestycję oraz L_t pracę. Zakładamy, że w każdym okresie zachodzi równowaga $S_t = I_t$ oraz, że oszczędności są stałą częścią produkcji, tj. $S_t = \alpha Y_t$. Akumulacja kapitału jest opisana równaniem $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$ oraz produkcja jest zadana funkcją $Y_t = \min(K_t, L_t)$. Zakładamy, że $K_0 > 0$, $L_0 > 0$ i $0 < 1-\delta+\alpha < 1$, $K_0 < L_0$ oraz, że zasoby pracy są stałe $L_t = L_0$.

(a) [*4 p*] Wyprowadzić równanie rekurencyjne na kapitał per capita.

(b) [*2 p*] Rozwiązać otrzymane równanie.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim zauważamy, że dla dowolnych $K > 0$ i $L > 0$ zachodzi

$$\frac{Y}{L} = \frac{1}{L}\min(K, L) = \min(\frac{K}{L}, 1) = \min(k, 1),$$

gdzie k jest kapitałem per capita.

Aby wyprowadzić równanie zauważamy następujący mechanizm. Początkowo mamy k_0. Z tego możemy obliczyć $y_0 = \min(k_0, 1)$ i dalej $s_0 = \alpha y_0$ co daje $i_0 = \alpha y_0$. Mając i_0 i k_0 obliczamy $k_1 = (1-\delta)k_0 + i_0$. Mamy zatem

$$k_1 = (1-\delta)k_0 + \alpha\min(k_0, 1) \qquad \text{kolejno} \qquad k_2 = (1-\delta)k_1 + \alpha\min(k_1, 1)$$

i ogólnie otrzymujemy

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \alpha\min(k_t, 1).$$

Ponieważ $k_0 < 1$ więc w pierwszym kroku mamy $k_1 = (1-\delta+\alpha)k_0 < k_0$ ze względu na założenie $K_0 < L_0$ i $1-\delta+\alpha < 1$. Zatem $k_1 < 1$. Konsekwentnie dla każdego t równanie rekurencyjne jest postaci

$$k_{t+1} = (1-\delta+\alpha)k_t. \tag{1}$$

(b) Rozwiązanie równania (1) jest trywialne i jest postaci

$$k_t = (1-\delta+\alpha)^t k_0.$$

Zadanie 2 Dane jest równanie liniowe o stałych współczynnikach postaci

$$x_{t+3} + \left(-2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) x_{t+2} + \left(\sqrt{3} + 4\right) x_{t+1} - 2x_t = 0.$$

(a) Podać rozwiązanie ogólne (rzeczywiste) powyższego równania.

Rozwiązanie.

(a) Wielomian charakterystyczny powyższego równania jest postaci

$$w(m) = m^3 + \left(-2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) m^2 + \left(\sqrt{3} + 4\right) m - 2.$$

Powyższy wielomian ma następujące pierwiastki: $m_1 = 1/2$, $m_2 = \sqrt{3} + i$ i $m_3 = \sqrt{3} - i$. Para pierwiastków sprzężonych ma moduł 2 oraz argument główny $\pi/6$ zatem można je zapisać jako $2(cos(\pi/6) \pm i\sin(\pi/6))$. Rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$x_t = C_1\frac{1}{2^t} + C_2 2^t\cos(t\pi/6) + C_3 2^t\sin(t\pi/6).$$

Zadanie 3 Dany jest układ równań rekurencyjnych postaci

$$\begin{bmatrix} x_{t+1,1} \\ x_{t+1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/12 & 1/24 \\ 1/6 & 5/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{t,1} \\ x_{t,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13/24 \\ 5/12 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(a) [*6 p*] Znaleźć rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) W pierwszej kolejności znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy współczynników. Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(\lambda) = \left(\frac{5}{12} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{144} = \frac{(2\,\lambda - 1)\,(3\,\lambda - 1)}{6}$$

skąd wartości własne to $\lambda_1 = 1/3$ i $\lambda_2 = 1/2$. Odpowiadające im wektory własne obliczamy w standardowy sposób przyjmując

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Równowaga $\bar{x}$ jest postaci

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 13/24 \\ 5/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13/24 \\ 5/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie jest zatem postaci

$$\begin{aligned} x_t &= H \begin{bmatrix} 1/3^t & 0 \\ 0 & 1/2^t \end{bmatrix} H^{-1} (x_0 - \bar{x}) + \bar{x} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3^t & 0 \\ 0 & 1/2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \left(x_0 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\,3^t} + 2^{-t-1} & \frac{1}{4\,3^t} - 2^{-t-2} \\ \frac{1}{3^t} - \frac{1}{2^t} & \frac{1}{2\,3^t} + 2^{-t-1} \end{bmatrix} \left(x_0 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 4 Dane jest następujące zagadnienie optymalizacji

$$\max_{\langle u_t \rangle} \sum_{t=0}^{T-1} -x_t^2 - x_T^2, \qquad \text{gdzie } x_{t+1} = x_t + u_t \text{ i } u_t \in \mathbb{R} \text{ oraz } x_0 \in \mathbb{R}.$$

(a) Podać funkcję wartości $J(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

(a) Korzystamy z twierdzenia Bellmana. Dla czasu T mamy

$$J_T(x) = -x^2$$

i $u \in [-1, 1]$ jest dowolne. Dla czasu $T - 1$ otrzymujemy

$$J_{T-1}(x) = \max_u -x^2 + J_T(x+u) = \max_u -x^2 - (x-u)^2.$$

Powyższe zagadnienie optymalizacji jest trywialne, otrzymujemy $u^* = -x$ i konsekwentnie $J_{T-1}(x) = -x^2$.

W kolejnych krokach otrzymujemy to samo zagadnienie optymalizacji, co prowadzi do konkluzji, że $J_0(x) = -x^2$.

Zadanie 5 Dane jest następujące zagadnienie programowania dynamicznego

$$\max_{\langle u_t \rangle} \sum_{t=0}^{\infty} -\beta x_t^2, \qquad \text{gdzie } x_{t+1} = x_t + u_t,\ u_t \in \mathbb{R} \text{ i } x_0 \in \mathbb{R}.$$

(a) [*3 p*] Pokazać, że $J(x) = -x^2$ jest funkcją wartości dla tego zagadnienia.

(b) [*3 p*] Jak wygląda optymalne sterowanie?

Rozwiązanie.

(a) Aby sprawdzić, że $J(x) = -x^2$ jest funkcją wartości wstawiamy ją do równania Bellmana otrzymując

$$-x^2 = \max_u -x^2 + \beta J(x+u) = \max_u -x^2 - \beta(x+u)^2.$$

Maksymalizowana funkcja jest oczywiście wklęsła i przyjmuje maksimum dla $u = -x$. Przy takim sterowaniu wartość funkcji po prawej stronie wynosi $-x^2$ a więc funkcja $J(x) = -x^2$ rzeczywiście jest funkcją wartości.

(b) Optymalne sterowanie wygląda w następujący sposób. Jeżeli w pierwszym kroku wyniesie ono $u_0 = -x_0$ to $x_1 = 0$ i w kolejnych krokach otrzymamy $x_t = 0$ ze sterowaniem $u_t^* = 0$.