Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 28.01.2013

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(4)}(t) - 2x^{(3)}(t) + 2x'(t) - x(t) = t + \sin(t). \qquad (1)$$

(a) [3 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [3 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególne dla warunku początkowego

$$x(0) = -1/4, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 25/4, \quad x^{(3)}(0) = 9.$$

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1),$$

skąd otrzymujemy pierwiastki $\lambda = 1$ (krotność algebraiczna 3) oraz $\lambda = 1$. Rozwiązanie równania jednorodnego jest zatem postaci

$$x(t) = c_4 e^t t^2 + c_3 e^t t + c_1 e^{-t} + c_2 e^t.$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie równania niejednorodnego można skorzystać z metody nieoznaczonych współczynników. Jako funkcję testową przyjmujemy $u(t) = a + bt + \alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$. Podstawiając funkcję do równania otrzymujemy

$$-a + 2(b + \alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) - bt - 2(\beta\sin(t) - \alpha\cos(t)) = t + \sin(t),$$
$$-a - bt + 2b + 4\alpha\cos(t) - 4\beta\sin(t) = t + \sin(t)$$

Z porównania współczynników otrzymujemy układ równań liniowych postaci

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 0 \\ -b &= 1 \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= -1/4. \end{aligned}$$

Skąd rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest postaci

$$x(t) = c_4 e^t t^2 + c_3 e^t t + c_1 e^{-t} + c_2 e^t - 2 - t - \frac{1}{r}\cos(t)$$

(b) Aby znaleźć rozwiązanie szczególne dla podanego warunku początkowego obliczamy pochodne rozwiązania ogólnego w punkcie 0 i przyrównujemy do podanych wartości otrzymując

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - \frac{9}{4} &= -1/4 \\ -c_1 + c_2 + c_3 - 1 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 + \frac{1}{4} &= 25/4 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 + 6c_4 &= 9 \end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymujemy $C_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3, 4$.

Zadanie 2 Rozpatrujemy duopol Cournota. Dwie firmy ustalają jednocześnie wielkość produkcji, odpowiednio q_1 i q_2. Koszt produkcji każdej firmy jest zadany funkcja postaci $c(q) = cq$, gdzie $c > 0$ jest kosztem krańcowym. Odwrotna funkcja popytu jest postaci $p(q) = 100 - 2q$.

(a) [2 *p*] Zapisać zadania optymalizacyjne obu firm.

(b) [2 *p*] Rozwiązać zadania optymalizacyjne obu firm (znaleźć krzywe rekacji).

(c) [2 *p*] Wyznaczyć równowagę Nasha (przecięcie krzywych reakcji).

Rozwiązanie.

(a) Funkcje zysku obu firm są odpowiednio postaci

$$\pi_1 = q_1 \left(100 - 2\left(q_1 + q_2\right)\right) - cq_1,$$
$$\pi_2 = q_2 \left(100 - 2\left(q_1 + q_2\right)\right) - cq_2.$$

Firmy maksymalizują powyższe funkcje tak więc zadania optymalizacji mają następującą postać (odpowiednio)

$$\max_{q_1 > 0} q_1 \left(100 - 2\left(q_1 + q_2\right)\right) - cq_1,$$
$$\max_{q_2 > 0} q_2 \left(100 - 2\left(q_1 + q_2\right)\right) - cq_2.$$

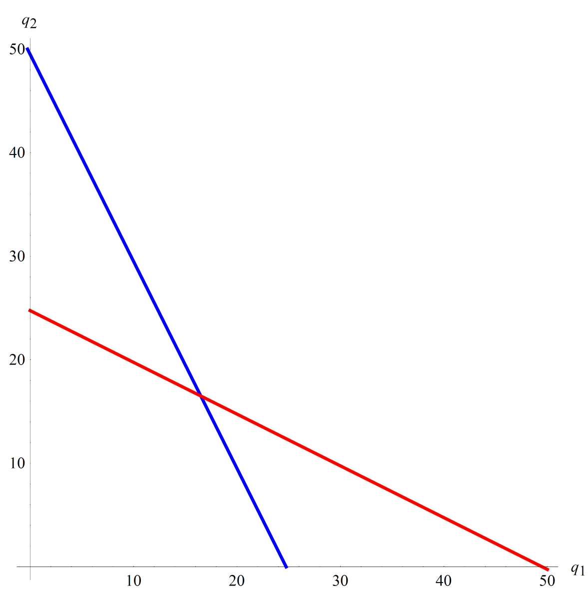
(b) Obie maksymalizowane funkcje są wklęsłe więc wystarczy rozpatrzyć warunki pierwszego rzędu postaci

$$-c - 2q_1 - 2\left(q_1 + q_2\right) + 100 = 0,$$
$$-c - 2q_2 - 2\left(q_1 + q_2\right) + 100 = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ nierówności otrzymujemy krzywe reakcji postaci

$$q_1 = \frac{1}{4}\left(-c - 2q_2 + 100\right) q_2 = \frac{1}{4}\left(-c - 2q_1 + 100\right).$$

Powyższe krzywe reakcji są przedstawione na rysunku 1.



(a) krzywe reakcji

Rysunek 1: 1(a) — Krzywe rekacji dla $c = 1$. Przecięcie jest równowagą Nasha w strategiach czystych.

(c) Rozwiązując układ równań zadany przez krzywe reakcji otrzymujemy równowagę Nasha (w strategiach czystych) postaci

$$q_1 = \frac{50}{3} - \frac{c}{6},$$
$$q_2 = \frac{50}{3} - \frac{c}{6}.$$

Zadanie 3 Dany jest układ równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach pierwszego rzędu postaci

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2 &= 4x_2(t) - 2x_1(t)\\ \dot{x}_3 &= x_2(t) + x_3(t)\end{aligned}$$

(a) [*6 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Podany układ równań w postaci macierzowej jest postaci

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości własne macierzy współczynników. Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

skąd otrzymujemy wartości własne postaci $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_1 = 1$. Obliczając dla każdej wartości własnej wektor własny otrzymujemy

$$h_1 = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne jest postaci

$$x = C_1 \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} e^{t}.$$

Zadanie 4 Dany jest układ równań nieliniowych postaci

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - (x-1)x(x+1)\\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}$$

(a) [*3 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*3 p*] Określić stabilność wszystkich równowag.

Rozwiązanie.

(a) W pierwszej kolejności poszukujemy równowag rozwiązując układ równań postaci

$$\begin{aligned}0 &= y - (x-1)x(x+1)\\ 0 &= x - y\end{aligned}$$

Otrzymujemy trzy rónowagi postaci $a = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $b = (0, 0)$ i $c = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Aby zbadać ich lokalną stabilność linearyzujemy układ równań otrzymując macierz Jacobiego postaci

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wartości własne tej macierzy to

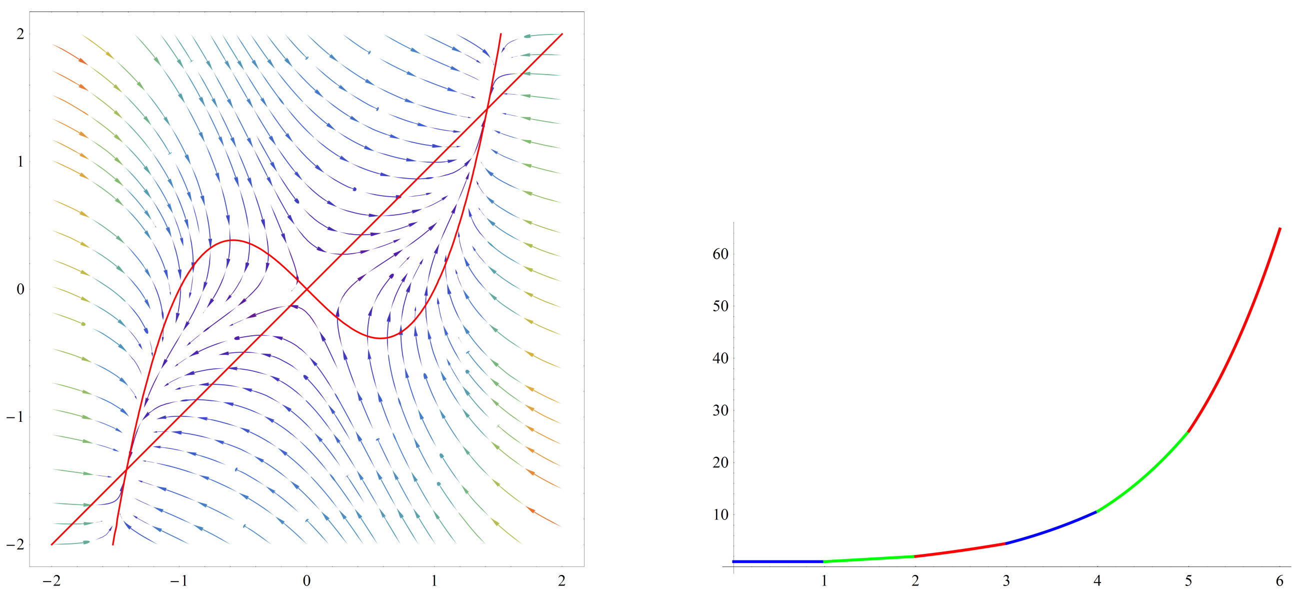
$$\left\{ \frac{1}{2}\left(-3x^2 - \sqrt{9x^4 - 12x^2 + 8}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{9x^4 - 12x^2 + 8} - 3x^2\right) \right\}$$

Dlatego w kolejnych równowagach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\} &\quad \text{dla równowagi } b \\ \left\{-3 - \sqrt{5}, \sqrt{5} - 3\right\} &\quad \text{dla równowag } a \text{ i } c \end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że równowaga b jest niestabilna (siodło) a rónowagi a i c są stabilne.

Portret fazowy jest przedstawiony na wykresie 2(a).



(a) portret fazowy

(b) rozwiązanie szczególne

Rysunek 2: 2(a) — Portret fazowy nieliniowego układu równań z zadania 4. 2(b) — Rozwiązanie równania (2). Kolory oznaczają fragmenty rozwiązania dla kolejnych odcinków.

Zadanie 5* Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x}(t) = x(t - 1), \tag{2}$$

gdzie $x(t) = 1$ dla $t \in [0, 1)$.

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie szczególne dla $t \geq 0$.

Rozwiązanie.

(a) Ponieważ opóźnienie w równaniu (2) jest stałe (i wynosi $h = 1$) więc możemy zadanie rozwiązać na kolejnych odcinkach.

Na odcinku $[0, 1)$ zadanie jest już rozwiązane i $x(t) = 1$. W szczególności przyjmujemy $x(1) = 1$.

Na odcinku $[1, 2)$ równanie różniczkowe (2) przyjmuje postać

$$\dot{x}(t) = 1, \quad \text{z warunkiem początkowym } x(1) = 1.$$

Równanie to ma proste rozwiązanie postaci $x(t) = t$. Zatem na odcinku $[1, 2)$ przyjmujemy $x(t) = t$ oraz $x(2) = 2$.

Na kolejnym odcinku $[2, 3)$ mamy do rozwiązania równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x}(t) = t, \quad \text{z warunkiem początkowym } x(2) = 2.$$

Podobnie jak poprzednio równanie to ma proste rozwiązanie, które jest postaci

$$x(t) = \frac{t^2}{2}$$

i jako warunek początkowy dla kolejnego zadania przyjmujemy $x(3) = 9/2$.

Kontynuując w ten sposób otrzymujemy ciąg rozwiązań postaci

$$\left\{1, t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}, \frac{t^4}{24}, \frac{t^5}{120}\right\}$$

skąd łatwo zobaczyć, że na odcinku $[k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$ rozwiązanie jest postaci

$$x_k(t) = \frac{1}{\alpha_k}\, x^k,$$

gdzie współczynniki α_k spełniają równanie

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k(k+1), \quad \alpha_1 = 1.$$

Rozwiązanie powyższego równania rekurencyjnego jest trywialne i wynosi $\alpha_k = k!$. Rozwiązanie możemy zatem zapisać w postaci

$$x_k(t) = \frac{1}{k!}x^k.$$

Wykres rozwiązania jest przedstawiony na wykresie 2(b).