Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 28.01.2013

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$\dddot{x} - \frac{7\,\ddot{x}}{6} + \frac{7\,\dot{x}}{9} - \frac{2\,x}{9} = -\frac{2}{9}t + \frac{5}{9} \tag{1}$$

(a) [*5 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*1 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególne dla warunku początkowego

$$x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = \frac{2\sqrt{3}+11}{6}, \quad \ddot{x}(0) = -\frac{-8\sqrt{3}-1}{36}.$$

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7\,\lambda^2}{6} + \frac{7\,\lambda}{9} - \frac{2}{9} = \frac{(2\,\lambda-1)\,\left(9\,\lambda^2-6\,\lambda+4\right)}{18} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)\left(\lambda + \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) \tag{2}$$

skąd mamy pierwiastki

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma zatem postać

$$x(t) = C_3\,e^{\frac{t}{3}}\,\sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C_2\,e^{\frac{t}{3}}\,\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C_1\,e^{\frac{t}{2}}. \tag{3}$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) skorzystamy z metody nieoznaczonych współczynników. Wprowadzamy funkcję testową postaci $u(t) = \alpha + \beta t$ i podstawiamy ją do równania (1) otrzymując

$$\frac{7\,\beta}{9} - \frac{2\,(\beta\,t+\alpha)}{9} = -\frac{2}{9}t + \frac{5}{9}. \tag{4}$$

Z porównania współczynników wielomianów otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} -\dfrac{2\,\beta}{9} = -\dfrac{2}{9} \\ \dfrac{7\,\beta - 2\,\alpha}{9} = \dfrac{5}{9} \end{cases} \tag{5}$$

skąd otrzymujemy $\alpha = 1$ i $\beta = 1$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_3\,e^{\frac{t}{3}}\,\sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C_2\,e^{\frac{t}{3}}\,\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C_1\,e^{\frac{t}{2}} + t + 1. \tag{6}$$

(b) Wyznaczenie rozwiązania szczególnego sprowadza się do obliczenia wartości funkcji x i jej pochodnych i przyrównania do zakładanych wartości. Mamy zatem

$$\begin{aligned} x(0) &= C_2 + C_1 + 1 = 3 \\ \dot{x}(0) &= \frac{2\sqrt{3}\,C_3 + 2\,C_2 + 3\,C_1 + 6}{6} = \frac{2\sqrt{3}+11}{6} \\ \ddot{x}(0) &= -\frac{-8\sqrt{3}\,C_3 + 8\,C_2 - 9\,C_1}{36} = -\frac{-8\sqrt{3}-1}{36}. \end{aligned} \tag{7}$$

Rozwiązując układ (7) otrzymujemy $C_1 = C_2 = C_3 = 1$.

Zadanie 2 Popyt na rozpatrywane dobro jest zadany funkcją popytu $q(p)$, gdzie $p > 0$ to cena dobra a sama funkcja jest wklęsła i malejąca. Rozpatrujemy sytuację monopolisty, którego koszty produkcji są zadane funkcją kosztów $c(q)$, o której zakładamy, że jest wypukła i rosnąca. Zakładamy, że wszystkie funkcje są różniczkowalne w sposób ciągły.

(a) [*1 p*] Wypisać zadanie optymalizacji monopolisty.

(b) [*4 p*] Rozwiązać zadanie optymalizacji monopolisty (podać warunki konieczne i wystarczające) oraz zinterpretować jest w terminach cenowej elastyczności popytu.

(c) [*4 p*] Do czego dąży cena równowagowa jeżeli elastyczność cenowa popytu dąży do nieskończoności.

Rozwiązanie.

(a) Monopolista będzie maksymalizował swój zysk zadany wzorem

$$\pi(p) = p \cdot q(p) - c\big(q(p)\big), \qquad \text{dla } p > 0.$$

(b) Ponieważ funkcja zysku, którą maksymalizuje monopolista jest wklęsła więc wystarczy rozważyć warunki pierwszego rzędu, które są następującej postaci

$$\frac{d\pi}{dp} = q(p) + p \cdot \frac{dq(p)}{dp} - \frac{dc\big(q(p)\big)}{dq} \cdot \frac{dq(p)}{dp} = 0.$$

Pozbywając się i przekształcając warunki pierwszego rzędu dochodzimy do postaci

$$\begin{aligned}
q + p\frac{dq}{dp} - \frac{dc}{dq}\frac{dq}{dp} &= 0 \\
q + p\frac{dq}{dp} &= \frac{dc}{dq}\frac{dq}{dp} \\
q\frac{dp}{dq} + p &= \frac{dc}{dq} \\
p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) &= \frac{dc}{dq} \\
p\left(1 - \frac{1}{-\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}}\right) &= \frac{dc}{dq} \\
p\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) &= \mathrm{MC},
\end{aligned}$$

gdzie ϵ to cenowa elastyczność popytu a MC to koszt krańcowy.

(c) Przy $\epsilon \to \infty$ cena w równowadze dąży do kosztu krańcowego.

Zadanie 3 Dany jest układ równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\dfrac{x_3}{5} + \dfrac{4\,x_2}{5} - \dfrac{12\,x_1}{5} \\ \dot{x_2} = -\dfrac{2\,x_3}{5} - \dfrac{12\,x_2}{5} + \dfrac{6\,x_1}{5} \\ \dot{x_3} = -\dfrac{16\,x_3}{5} + \dfrac{9\,x_2}{5} + \dfrac{3\,x_1}{5} \end{cases} \tag{8}$$

(a) [*6 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim szukamy wartości własnych i wektorów własnych macierzy współczynników podanego układu równań. Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(\lambda) = -\lambda^3 - 8\,\lambda^2 - 21\,\lambda - 18 = -\,(\lambda+2)\;(\lambda+3)^2$$

skąd otrzymujemy dwie wartości własne $\lambda_1 = -2$ (krotność algebraiczna 1) i $\lambda_2 = -3$ (krotność algebraiczna 2).

Obliczamy wektory własne w standardowy sposób otrzymując dla wartości $\lambda_1 = -2$ wektor $[1, 1, 2]$ oraz dla wartości własnej $\lambda_2 = -3$ wektor $[1, 0, 3]$ (krotność geometryczna 1). Aby obliczyć brakujący wektor bazy rozwiązujemy układ równań liniowych o następującej macierzy rozszerzonej

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & 3 \end{bmatrix} \sim \quad \text{operacje elementarne na wierszach macierz} \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$h_1 = -1 + \frac{1}{3}\alpha, \quad h_2 = 2, \quad h_3 = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Przyjmując $\alpha = 0$ otrzymujemy brakujący wektor bazy postaci $[-1, 2, 0]$.

Rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + C_3 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{-3t}.$$

Zadanie 4 Równanie replikatora, opisujące pewien wariant uczenia się poprzez imitację w grze snow-drift, **zdefiniowane na odcinku** $[0, 1]$, jest postaci

$$\dot{x}_1 = -x_1\ (r-1) + x_1^2\ (r-2) + x_1^3 \tag{9}$$

gdzie $r \in (0, 1)$ jest pewnym parametrem.

(a) [*3 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*3 p*] Określić stabilność wszystkich równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim upraszczamy równanie (9) do jak najprostszej postaci otrzymując

$$\dot{x}_1 = (x_1 - 1)\ x_1\ (r + x_1 - 1)$$

skąd natychmiast widać, że mamy tylko trzy równowagi $\hat{x}_1^a = 0$, $\hat{x}_1^b = 1 - r$ i $\hat{x}_1^c = 1$, które odpowiadają równowagom Nasha.

(b) Aby stwierdzić stabilność równowag można obliczyć wartości pochodnych prawej strony równania w równowagach (co jest linearyzacją i obliczeniem wartości własnych linearyzacji). Otrzymujemy

$$\frac{df}{dx_1} = 2\,x_1\,r - r + 3\,x_1^2 - 4\,x_1 + 1$$

i konsekwentnie

$$\frac{df(\hat{x}_1^a)}{dx_1} = 1 - r > 0, \quad \frac{df(\hat{x}_1^b)}{dx_1} = -r(1-r) < 0, \quad \frac{df(\hat{x}_1^c)}{dx_1} = r > 0,$$

skąd równowagi $\hat{x}_1^a = 0$, $\hat{x}_1^c = 1$ są niestabilne a równowaga $\hat{x}_1^b = 1 - r$ jest stabilna.

Zadanie 5* Rozważamy zagadnienie optymalizacji konsumenta. Konsument posiada bogactwo $w > 0$ i jest charakteryzowany funkcją użyteczności $u(x)$, która jest różniczkowalna w sposób ciągły, quasi-wklęsła i

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n,$$

a $x = (x_1, \ldots, x_n)$ jest koszykiem dóbr, $n \in \mathbb{N}$.

(a) [*3 p*] Czy zbiór optymalnych koszyków musi być wypukły?

(b) [*3 p*] Czy zbiór optymalnych koszyków musi być jednoelementowy?

W obu przypadkach odpowiedź dokładnie uzasadnić!

Rozwiązanie.

(a) Tak. Ponieważ funkcja u jest różniczkowalna więc jest ciągła. Zbiór dopuszczalnych rozwiązań jest zwarty a więc istnieje rozwiązanie x^*. Zbiór potencjalnych innych rozwiązań jest przecięciem ograniczenia budżetowego, które jest wypukłe oraz zbioru

$$\{x : u(x) \geq u(x^*)\},$$

który jest wypukły na mocy quasi-wklęsłości funkcji u.

(b) Nie. Funkcja $u(x) = p \circ x$ spełnia wszystkie założenia ale zbiór optymalnych rozwiązań jest tożsamy z ograniczeniem budżetowym.