Nazwisko i Imię	Rozwiązania	**Indeks**	

Ekonomia Matematyczna 26.09.2012

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(3)} + 5\ddot{x} + 8\dot{x} + 4x = \mathrm{e}^{-3t} \tag{1}$$

(a) [*5 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*1 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególny dla warunku początkowego $x(0) = 7/2$, $\dot{x}(0) = -3/2$, $\ddot{x}(0) = -11/2$.

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(r) = r^3 + 5\,r^2 + 8\,r + 4 \tag{2}$$

skąd mamy $r_1 = -2$, $r_2 = -1$ i pierwiastek r_1 ma krotność algebraiczną 2. Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-2\,t} + C_2 t\mathrm{e}^{-2\,t} + C_3\mathrm{e}^{-t} \tag{3}$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) wprowadzamy funkcję testową postaci $u(t) = Ke^{-3t}$ i podstawiamy ją do równania (1) otrzymując

$$-2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\,K. \tag{4}$$

Zatem dla dowolnego t musi być spełnione równanie postaci

$$-2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\,K = \mathrm{e}^{-3\,t}. \tag{5}$$

Z porównania współczynników obu stron otrzymujemy równanie postaci:

$$-2\,K = 1 \tag{6}$$

skąd mamy $K = -1/2$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-2\,t} + C_2 t\mathrm{e}^{-2\,t} + C_3\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}. \tag{7}$$

(b) Wyznaczenie rozwiązania szczególnego sprowadza się do obliczenia wartości funkcji x i jej pochodnych i przyrównania do zakładanych wartości. Mamy zatem

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_3 - 1/2 = 7/2 \\ \dot{x}(0) &= -2C_1 + C_2 - C_3 + 3/2 = -3/2 \\ \ddot{x}(0) &= 4C_1 - 4C_2 + C_3 - 9/2 = -11/2. \end{aligned} \tag{8}$$

Rozwiązując układ (8) otrzymujemy $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = x_1^{1/5} x_2^{4/5}. \tag{9}$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_i > 0$, $i = 1, 2$, a konsument dysponuje bogactwem w. Dodatkowo wiemy, że stosunek cen wynosi $p_2/p_1 = 4$.

(a) [*5 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki dostateczne istnienia maksimum.

(b) [*1 p*] Jaki jest stosunek x_1^*/x_2^* kupowanych ilości dóbr w równowadze?

Rozwiązanie.

(a) Jest to standardowe zadanie optymalizacji z ograniczeniem w postaci nierówności postaci $p_1x_1 + p_2x_2 \leq w$. Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{5}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{4/5} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{4}{5}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/5} > 0$$

więc ograniczenie w postaci nierówności możemy zamienić na ograniczenie w postaci równości $p_1x_1 + p_2x_2 = w$ i stosować twierdzenie Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a jest postaci

$$L(x) = u(x) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w) = x_1^{1/5} x_2^{4/5} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w). \tag{10}$$

Różniczkując (10) względem x_i, $i = 1, 2$ oraz dodając ograniczenie otrzymujemy warunek konieczny postaci

$$\frac{1}{5}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{4/5} = \lambda p_1 \tag{11}$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/5} = \lambda p_2 \tag{12}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = w \tag{13}$$

Dzieląc stronami równania (11) i (12) otrzymujemy

$$\frac{x_2}{4x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{skąd} \quad p_2x_2 = 4p_1x_1.$$

Wstawiając ostatnią równość do ograniczenia (13) otrzymujemy

$$p_1x_1 + 4p_1x_1 = w \quad \text{skąd} \quad x_1 = \frac{w}{5p_1} \quad \text{i dalej} \quad x_2 = \frac{4w}{5p_2}.$$

Zamiast sprawdzać warunek drugiego rzędu wystarczy zauważyć, że funkcją u jest wklęsła a zbiór budżetowy wypukły a więc znaleziony punkt musi być maksimum.

(b) Mamy

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{p_2}{4p_1}$$

ale korzystając z tego, że $p_2/p_1 = 4$ otrzymujemy

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{p_2}{4p_1} = 1$$

a więc w równowadze konsument kupuje równe ilości dobra.

Zadanie 3 Dany jest następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - x^3 \end{cases} \tag{14}$$

(a) [2 *p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [4 *p*] Zbadać stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim szukamy równowag. W tym celu rozwiązujemy układ równań postaci

$$\begin{aligned} 0 &= x - y \\ 0 &= y - x^3 \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy trzy równowagi postaci

$$a = (-1, -1)\,, \quad b = (0, 0) \quad \text{i} \quad c = (1, 1)\,.$$

(b) Badanie stabilności równowagi sprowadza się do znalezienia linearyzacji i sprawdzeniu znaku części rzeczywistych wartości własnych. Macierz Jacobiego ma postać

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3\,x^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla równowag a i c otrzymujemy

$$J(a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

skąd obliczamy $\det J(a) = -2 < 0$ i wnioskujemy, że wartości własne są liczbami rzeczywistymi o przeciwnych znakach, a więc równowagi a i c nie są stabilne (siodła).

Dla równowagi b otrzymujemy

$$J(b) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i podobnie obliczając otrzymujemy $\det J(b) = 2$ i $\mathrm{tr} J(b) = 2$ a więc części rzeczywiste wartości własnych są dodatnie a więc równowaga nie jest stabilna (źródło).

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -3y \\ \dot{z} = -2x + y - z \end{cases} \tag{15}$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Obliczamy wielomian charakterystyczny układu $w(r)$ otrzymując

$$w(r) = (-r-3)^2\ (-r-1) = -(r+1)\ (r+3)^2$$

skąd wiemy, że istnieją dwie wartości własne $r_1 = -3$ o krotności algebraicznej 2 oraz $r_2 = -1$ o krotności algebraicznej 1.

W następnym kroku szukamy wektorów własnych odpowiadających kolejnym wartościom własnym. Dla wartości własnej $r_2 = -1$ macierz rozszerzona układu równań $(A - rI)h = 0$ jest postaci

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne jest opisane przez

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zatem jako wektor własny możemy przyjąć

$$h^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla wartości własnej $r_1 = -3$ o krotności algebraicznej 2 obliczamy wektory podobnie. Macierz rozszerzona układu równań $(A - rI)h = 0$ jest postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest opisane przez

$$x = \alpha, \quad y = 0, \quad z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Jest to rozwiązanie jednowymiarowe a więc krotność geometryczna wartości własnej $r_1 = -3$ wynosi 1. Jako wektor własny możemy przyjąć wektor

$$h^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Brakujący wektor serii obliczamy z równania rekurencyjnego $(A - rI)h^3 = h^2$. Macierz rozszerzona tego układu jest postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rozwiązanie ogólne jest postaci

$$x = \alpha, \quad y = 1, \quad z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

i jako wektor serii możemy przyjąć

$$h^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie rozwiązanie jest postaci

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + +C_3 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{-3t}.$$

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja $x(t)$ klasy C^1 spełniająca warunek początkowy $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ oraz równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x} = f(t), \tag{16}$$

gdzie $f(t)$ jest gęstością zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o wartości średniej 0 oraz odchyleniu standardowym 1.

(a) [*6 p*] Pokazać, że funkcja $x(t)$ jest rosnąca na odcinku $(0, \infty)$ oraz ma skończoną granicę $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

Zgodnie z równaniem (16) i założeniami zadania wiemy, że funkcja $x(t)$ spełnia równanie postaci

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Rozwiązanie jest zatem postaci

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\tau^2/2} d\tau.$$

W pierwszej kolejności pokażemy, że funkcja jest rosnąca. Niech $0 < t_1 < t_2$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x_0 + \int_0^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\tau^2/2} d\tau \\ &= x_0 + \int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\tau^2/2} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\tau^2/2} d\tau \\ &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\tau^2/2} d\tau > x(t_1), \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że gęstość rozkładu normalnego jest dodatnia dla dowolnego t.

Rozwiązanie $x(t)$ ma w sposób oczywisty skończoną granicę przy $t \to \infty$, która wynosi $x_0 + 1/2$.