

Ekonomia Matematyczna 26.09.2012

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(3)} + 5\ddot{x} + 8\dot{x} + 4x = e^{-3t} \quad (1)$$

(a) [5 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [1 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególny dla warunku początkowego $x(0) = 7/2$, $\dot{x}(0) = -3/2$, $\ddot{x}(0) = -11/2$.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = x_1^{1/5} x_2^{4/5}. \quad (2)$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_i > 0$, $i = 1, 2$, a konsument dysponuje bogactwem w . Dodatkowo wiemy, że stosunek cen wynosi $p_2/p_1 = 4$.

(a) [5 p] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki dostateczne istnienia maksimum.

(b) [1 p] Jaki jest stosunek x_1^*/x_2^* kupowanych ilości dóbr w równowadze?

Zadanie 3 Dany jest następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - x^3 \end{cases} \quad (3)$$

(a) [2 p] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [4 p] Zbadać stabilność równowag.

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -3y \\ \dot{z} = -2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

(a) [6 p] Podać rozwiązanie ogólne.

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja $x(t)$ klasy C^1 spełniająca warunek początkowy $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ oraz równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x} = f(t), \quad (5)$$

gdzie $f(t)$ jest gęstością zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o wartości średniej 0 oraz odchyleniu standardowym 1.

(a) [6 p] Pokazać, że funkcja $x(t)$ jest rosnąca na odcinku $(0, \infty)$ oraz ma skończoną granicę $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.