Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 11.06.2012

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(3)} + 5\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 6\cos(t) - 2\sin(t). \tag{1}$$

(a) [*5 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*1 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególny dla warunku początkowego $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = -3$, $\ddot{x}(0) = 9$.

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(r) = r^3 + 5\,r^2 + 7\,r + 3 \tag{2}$$

skąd mamy $r_1 = -3$, $r_2 = -1$ i pierwiastek r_2 ma krotność algebraiczną 2. Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 t \mathrm{e}^{-t}. \tag{3}$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) wprowadzamy funkcję testową postaci $u(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ i podstawiamy ją do równania (1) otrzymując

$$(-6\,b - 2\,a)\ \sin(t) + (6\,a - 2\,b)\ \cos(t) = 6\cos(t) - 2\sin(t). \tag{4}$$

Z porównania współczynników wielomianów otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} -2a - 6b = -2 \\ 6a - 2b = 6 \end{cases} \tag{5}$$

skąd mamy $a = 1$ i $b = 0$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 t \mathrm{e}^{-t} + \sin(t). \tag{6}$$

(b) Wyznaczenie rozwiązania szczególnego sprowadza się do obliczenia wartości funkcji x i jej pochodnych i przyrównania do zakładanych wartości. Mamy zatem

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 = 3 \\ \dot{x}(0) &= -3C_1 - C_2 + C_3 + 1 = -3 \\ \ddot{x}(0) &= 9C_1 + C_2 - 2C_3 = 9. \end{aligned} \tag{7}$$

Rozwiązując układ (7) otrzymujemy $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 1$.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}. \tag{8}$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_i > 0$, $i = 1, 2$, a konsument dysponuje bogactwem w. Dodatkowo wiemy, że cena dobra drugiego jest trzy razy większa niż cena dobra pierwszego.

(a) [*5 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki <u>dostateczne</u> istnienia maksimum.

(b) [*1 p*] Ile dobra drugiego w stosunku do dobra pierwszego kupuje konsument w równowadze?

Rozwiązanie.

(a) Jest to standardowe zadanie optymalizacji z ograniczeniem w postaci nierówności postaci $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$. Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{x_2^{3/4}}{4x_1^{1/4}} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{3x_1^{1/4}}{4x_2^{1/4}} > 0$$

więc ograniczenie w postaci nierówności możemy zamienić na ograniczenie w postaci równości $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ i stosować twierdzenie Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a jest postaci

$$L(x) = u(x) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) = x_1^{1/4} x_2^{3/4} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w). \tag{9}$$

Różniczkując (9) względem x_i, $i = 1, 2$ oraz dodając ograniczenie otrzymujemy warunek konieczny postaci

$$\frac{x_2^{3/4}}{4x_1^{1/4}} = \lambda p_1 \tag{10}$$

$$\frac{3x_1^{1/4}}{4x_2^{1/4}} = \lambda p_2 \tag{11}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = w \tag{12}$$

Dzieląc stronami równania (10) i (11) otrzymujemy

$$\frac{x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{skąd} \quad p_2 x_2 = 3p_1 x_1.$$

Wstawiając ostatnią równość do ograniczenia (12) otrzymujemy

$$p_1 x_1 + 3p_1 x_1 = w \quad \text{skąd} \quad x_1 = \frac{w}{4p_1} \quad \text{i dalej} \quad x_2 = \frac{3w}{4p_2}.$$

Zamiast sprawdzać warunek drugiego rzędu wystarczy zauważyć, że funkcją u jest wklęsła a zbiór budżetowy wypukły a więc znaleziony punkt musi być maksimum.

(b) Mamy

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{p_2}{3p_1}$$

ale korzystając z tego, że $p_2 = 3p_1$ otrzymujemy

$$\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{p_2}{3p_1} = 1$$

a więc w równowadze konsument kupuje równe ilości dobra.

Zadanie 3 Dany jest następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 4 \\ \dot{y} = (x-3)^2 + y^2 - 4 \end{cases} \tag{13}$$

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*4 p*] Zbadać stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim szukamy równowag. W tym celu rozwiązujemy układ równań postaci

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 - 4 \\ 0 &= (x-3)^2 + y^2 - 4 \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy dwie równowagi postaci

$$a = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \quad \text{i} \quad b = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right).$$

(b) Badanie stabilności równowagi sprowadza się do znalezienia linearyzacji i sprawdzeniu znaku części rzeczywistych wartości własnych. Macierz Jacobiego ma postać

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,(x-3) & 2\,y \end{bmatrix}$$

Dla równowagi a otrzymujemy

$$J(a) = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{7} \\ -3 & -\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

skąd obliczamy $\det J(a) = -6\sqrt{7} < 0$ skąd wnioskujemy, że wartości własne są liczbami rzeczywistymi o przeciwnych znakach, a więc równowaga a nie jest stabilna (siodło).

Podobnie dla równowagi b otrzymujemy

$$J(b) = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{7} \\ -3 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

o podobnie obliczając otrzymujemy $\det J(b) = 6\sqrt{7}$ i $\operatorname{tr} J(b) = 3 + \sqrt{7}$ a więc części rzeczywiste wartości własnych są dodatnie a więc równowaga nie jest stabilna (źródło).

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{14}$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Obliczamy wielomian charakterystyczny układu $w(r)$ otrzymując

$$w(r) = -(1-r)(2-r)\,r - r + 1 = -(r-1)^3$$

skąd wiemy, że istnieje jedna wartość własna $r = 1$ o krotności algebraicznej 3.

W następnym kroku szukamy wektorów własnych. Macierz rozszerzona układu równań $(A - rI)h = 0$ jest postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest dwuwymiarowe i jest opisane przez

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wiemy zatem, że krotność geometryczna wartości własnej $r = 1$ wynosi 2. Jako wektory własne możemy przyjąć wektory

$$h^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad h^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Brakujący wektor serii obliczamy z równania rekurencyjnego $(A - rI)h^3 = h^2$. Macierz rozszerzona tego układu jest postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rozwiązanie ogólne jest postaci

$$h^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i jako wektor serii możemy przyjąć

$$h^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie rozwiązanie jest postaci

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + +C_3 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^t.$$

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja $x(t)$ klasy C^1 spełniająca warunek początkowy $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ oraz równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x} = (1 + \mathrm{e}^x)\, t. \tag{15}$$

(a) [*6 p*] Pokazać, że $t_0 = 0$ jest minimum globalnym funkcji $x(t)$. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

Zgodnie z równaniem (15) wiemy, że pochodna funkcji $x(t)$ jest ujemna dla $t < 0$, dodatnia dla $t > 0$ i przyjmuje wartość 0 dla $t = 0$. Zatem warunek konieczny dla minimum jest spełniony w postulowanym punkcie t_0.

Obliczając drugą pochodną funkcji $x(t)$ po czasie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}(1 + \mathrm{e}^x)\, t = \mathrm{e}^x \dot{x} t + (1 + \mathrm{e}^x)\\ &= \mathrm{e}^x (1 + \mathrm{e}^x)\, t^2 + (1 + \mathrm{e}^x) = \underbrace{(1 + \mathrm{e}^x)}_{\text{dodatnie}}\ \underbrace{(1 + t^2 \mathrm{e}^x)}_{\text{dodatnie}} > 0\end{aligned}$$

skąd widzimy, że funkcja $x(t)$ jest ściśle wypukła, a zatem punkt $t_0 = 0$ rzeczywiście jest minimum globalnym.