Nazwisko i Imię **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 11.06.2012

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(3)} + 5\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 6\cos(t) - 2\sin(t). \tag{1}$$

(a) [*5 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*1 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególny dla warunku początkowego $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = -3$, $\ddot{x}(0) = 9$.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}. \tag{2}$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_i > 0$, $i = 1, 2$, a konsument dysponuje bogactwem w. Dodatkowo wiemy, że cena dobra drugiego jest trzy razy większa niż cena dobra pierwszego.

(a) [*5 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki <u>dostateczne</u> istnienia maksimum.

(b) [*1 p*] Ile dobra drugiego w stosunku do dobra pierwszego kupuje konsument w równowadze?

Zadanie 3 Dany jest następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 4 \\ \dot{y} = (x-3)^2 + y^2 - 4 \end{cases} \tag{3}$$

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*4 p*] Zbadać stabilność równowag.

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{4}$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne.

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja $x(t)$ klasy C^1 spełniająca warunek początkowy $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ oraz równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x} = (1 + \mathrm{e}^x)\, t. \tag{5}$$

(a) [*6 p*] Pokazać, że $t_0 = 0$ jest minimum globalnym funkcji $x(t)$. Odpowiedź <u>dokładnie uzasadnić</u>.