Nazwisko i Imię	Rozwiązania	**Indeks**	

Ekonomia Matematyczna 16.02.2012

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x = 2\cos(t) - 6\sin(t). \tag{1}$$

(a) [*5 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*1 p*] Dla dowolnego czasu $t > 0$ dla rozwiązania $x(t)$ równania (1) określamy liczbę $B(t)$ w następujący sposób

$$B(t) = \min\{b \in \mathbb{R}_+ : |x(\tau)| \leq b \text{ dla dowolnego } \tau \geq t\}.$$

Wielkość $B(t)$ ogranicza zatem wartości przyjmowane przez rozwiązanie $x(t)$ równania (1) po czasie t. Znaleźć granicę $\lim_{t\to\infty} B(t)$.

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(r) = r^3 + 4\,r^2 + 5\,r + 2 = (r+1)^2\,(r+2)$$

skąd otrzymujemy dwa pierwiastki $r_1 = -2$ i $r_2 = -1$ o krotności algebraicznej odpowiednio 1 i 2. Konsekwentnie rozwiązanie równania jednorodnego jest postaci

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 t \mathrm{e}^{-t}.$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) wprowadzamy funkcję testową postaci $u(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ i podstawiamy ją do równania (1) otrzymując

$$(-4\,b - 2\,a)\,\sin(t) + (4\,a - 2\,b)\,\cos(t) = 2\cos(t) - 6\sin(t).$$

Z porównania współczynników wielomianów otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} -2a - 4b = -6 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases}$$

skąd mamy $a = 1$ i $b = 1$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 t \mathrm{e}^{-t} + \sin(t) + \cos(t). \tag{2}$$

(b) Ponieważ jesteśmy zainteresowanie granicą przy $t \to \infty$ więc wszystkie elementy rozwiązania (2), które mają granice 0 można pominąć. Konsekwentnie pozostaje nam do rozpatrzenia tylko składnik $\sin(t) + \cos(t)$. Składnik ten jest okresowy, a więc ograniczenie $B(t)$ można dla niego łatwo znaleźć szukając jego wartości maksymalnej (która jest przeciwna do wartości minimalnej) na odcinku $[0, 2\pi]$. Maksymalna wartość tego składnika wynosi $\sqrt{2}$, mamy więc $\lim_{t\to\infty} B(t) = \sqrt{2}$.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = x_1 + \sqrt{x_2} \tag{3}$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_1, p_2 > 0$, a konsument uzyskuje poziom użyteczności $\bar{U}$.

(a) [*6 p*] Znaleźć funkcję popytu (Hicksa) konsumenta $h(p, \bar{U})$ tj. taki koszyk, który minimalizuje koszt uzyskania zakładanego poziomu użyteczności. Proszę sprawdzić warunki dostateczne istnienia minimum.

Rozwiązanie.

(a) Tworzymy funkcje Lagrangea postaci

$$L(x) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda(x_1 + \sqrt{x_2} - \bar{U}).$$

Warunki pierwszego rzędu są postaci

$$\begin{aligned} D_1L(x) = p_1 - \lambda = 0 \\ D_2L(x) = p_2 - \lambda\frac{1}{2\sqrt{x_2}} = 0 \\ x_1 + \sqrt{x_2} - \bar{U} = 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymujemy

$$x_1^\star = \bar{U} - \frac{p_1}{2p_2}, \quad x_2^\star = \left(\frac{p_1}{2p_2}\right)^2, \quad \lambda = p_1.$$

Aby sprawdzić warunki drugiego rzędu obliczamy hesjan otrzymując w punkcie podejrzanym o ekstremum

$$H(x^\star) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_1\left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Aby sprawdzić jak określona jest forma kwadratowa zadana powyższą macierzą na przestrzeni stycznej do ograniczenia wystarczy znaleźć bazę przestrzeni stycznej. W tym celu obliczamy gradient ograniczenia otrzymując

$$\nabla u(x^\star) = [1, \frac{p_2}{p_1}] \quad \text{i wektor prostopadły postaci} \quad h = [\frac{p_2}{p_1}, -1].$$

Obliczamy

$$\alpha h^\mathrm{T} H \alpha h = \alpha^2 p_1 \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^3 > 0 \quad \text{dla } \alpha \neq 0.$$

Zatem znaleziony punkt jest minimum.

Zadanie 3 Dynamika replikatora określona tylko na odcinku $[0, 1]$ dla pewnej gry wygląda w następujący sposób

$$\dot{x} = x\ (-x\ (x + 3\ (1 - x)) - (1 - x)\ (x + 1) + x + 3\ (1 - x))\,, \tag{4}$$

gdzie $x(t)$ jest częścią populacji używającą pierwszej strategii czystej.

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*4 p*] Zbadać stabilność równowag.

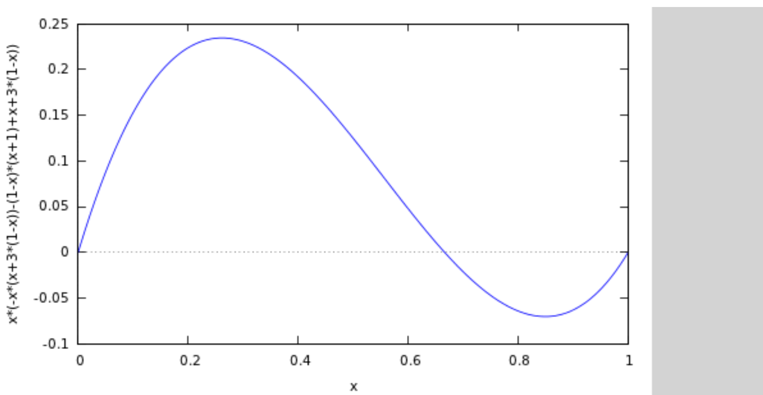
Rozwiązanie.

(a) Upraszczając równanie (4) otrzymujemy

$$\dot{x} = (x - 1)\ x\ (3\,x - 2)$$

skąd otrzymujemy trzy równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2/3$.

(b) Stabilność równowag można odczytać albo z rysunku (poniżej) albo obliczając pochodne (linearyzację). Otrzymujemy, że równowagi x_1 i x_2 są niestabilne oraz równowaga x_3 jest stabilna.



Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 8x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 9x_1 - 4x_2 \end{cases} \tag{5}$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Układ rozwiązujemy standardowo. Wielomian charakterystyczny dla macierzy układu wygląda w następujący sposób

$$w(r) = (-r-4)\ (8-r) + 36 = (r-2)^2$$

a zatem mamy tylko jedną wartość własną $r = 2$ z krotnością algebraiczną 2. Poszukujemy wektorów własnych otrzymując $h^1 = [2, 3]$. Drugi wektor liczymy jako wektor serii otrzymując $h^2 = [1, 1]$. Rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \left(t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathrm{e}^{2t}.$$

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja różniczkowalna dwukrotnie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której dla dowolnego t zachodzi $f'(t) \geq a > 0$ dla pewnej liczby $a \in \mathbb{R}_+$. Definiujemy funkcję $x(t)$ jako rozwiązanie równania różniczkowego postaci

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad \text{z warunkiem początkowym } x(0) = x_0.$$

(a) [*6 p*] Czy funkcja $x(t)$ jest ograniczona? Odpowiedź dokładnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

(a) Ponieważ funkcja x jest zadana równaniem różniczkowym z warunkiem początkowym więc wyraża się ona jako następująca całka

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Ze względu na założenia o funkcji f wiemy, że można ją dla dowolnego $t \geq 0$ oszacować przez

$$f(t) \geq f(0) + at.$$

Podstawiając to oszacowanie do całki wyrażającej funkcję $x(t)$ otrzymujemy

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau \geq x_0 + \int_0^t f(0) + a\tau d\tau = x_0 + f(0)t + \frac{1}{2}at^2 \to +\infty$$

przy $t \to +\infty$ a zatem funkcja x nie jest ograniczona.