

# Ekonomia Matematyczna 16.02.2012

1	2	3	4	5	6
					×

**Zadanie 1** Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x + 2x = 2\cos(t) - 6\sin(t). \quad (1)$$

(a) [5 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [1 p] Dla dowolnego czasu  $t > 0$  dla rozwiązania  $x(t)$  równania (1) określamy liczbę  $B(t)$  w następujący sposób

$$B(t) = \min\{b \in \mathbb{R}_+ : |x(\tau)| \leq b \text{ dla dowolnego } \tau \geq t\}.$$

Wielkość  $B(t)$  ogranicza zatem wartości przyjmowane przez rozwiązanie  $x(t)$  równania (1) po czasie  $t$ . Znaleźć granicę  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t)$ .

**Zadanie 2** Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = x_1 + \sqrt{x_2} \quad (2)$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio  $p_1, p_2 > 0$ , a konsument uzyskuje poziom użyteczności  $\bar{U}$ .

(a) [6 p] Znaleźć funkcję popytu (Hicksa) konsumenta  $h(p, \bar{U})$  tj. taki koszyk, który minimalizuje koszt uzyskania zakładanego poziomu użyteczności. Proszę sprawdzić warunki dostateczne istnienia minimum.

**Zadanie 3** Dynamika replikatora określona tylko na odcinku  $[0, 1]$  dla pewnej gry wygląda w następujący sposób

$$\dot{x} = x(-x(x+3(1-x)) - (1-x)(x+1) + x+3(1-x)), \quad (3)$$

gdzie  $x(t)$  jest częścią populacji używającą pierwszej strategii czystej.

(a) [2 p] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [4 p] Zbadać stabilność równowag.

**Zadanie 4** Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 8x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 9x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad (4)$$

(a) [6 p] Podać rozwiązanie ogólne.

**Zadanie 5\*** Niech dana będzie funkcja różniczkowalna dwukrotnie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dla której dla dowolnego  $t$  zachodzi  $f'(t) \geq a > 0$  dla pewnej liczby  $a \in \mathbb{R}_+$ . Definiujemy funkcję  $x(t)$  jako rozwiązanie równania różniczkowego postaci

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad \text{z warunkiem początkowym } x(0) = x_0.$$

(a) [6 p] Czy funkcja  $x(t)$  jest ograniczona? Odpowiedź dokładnie uzasadnić.