Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 25.01.2012

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(3)} - 3\dot{x} - 2x = 2t - 5 \tag{1}$$

(a) [*5 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*1 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególny dla warunku początkowego $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 2$, $\ddot{x}(0) = 1$.

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(r) = r^3 - 3\,r - 2 = (r-2)\,(r+1)^2 \tag{2}$$

skąd mamy $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ i pierwiastek r_1 ma krotność 2. Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2t\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{2t}. \tag{3}$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) wprowadzamy funkcję testową postaci $u(t) = a + bt$ i podstawiamy ją do równania (1) otrzymując

$$-3b - 2(a + bt) = 2t - 5 \tag{4}$$

Z porównania współczynników wielomianów otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} -3b - 2a = -5 \\ -2b = 2 \end{cases} \tag{5}$$

skąd mamy $a = 4$ i $b = -1$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2t\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{2t} + 4 - t. \tag{6}$$

(b) Wyznaczenie rozwiązania szczególnego sprowadza się do obliczenia wartości funkcji x i jej pochodnych i przyrównania do zakładanych wartości. Mamy zatem

$$\begin{aligned} x(0) &= 4 + C_1 + C_3 = 3 \\ \dot{x}(0) &= -1 - C_1 + C_2 + 2C_3 = 2 \\ \ddot{x}(0) &= C_1 - 2C_2 + 4C_3 = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Rozwiązując układ (7) otrzymujemy $C_1 = -5/3$, $C_2 = 0$, $C_3 = 2/3$.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{8}$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, a konsument dysponuje bogactwem w.

(a) [*6 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki wystarczające istnienia maksimum.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim nie chcemy pracować z taką funkcją użyteczności[1] i stosujemy znany trick a więc logarytmujemy u i dalej pracujemy z funkcją $\tilde{u} = \ln(u)$, dokładnie

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

Taka zamiana funkcji nie zmienia rozwiązania ponieważ funkcja $\ln$ jest rosnąca.

Ponieważ $\partial\tilde{u}/\partial x_i > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$ więc możemy stosować twierdzenie Lagrange'a (a nie Kuhna-Tuckera). Funkcja Lagrange'a L ma postać

$$L(x) = \tilde{u}(x) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - w \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - w \right) \tag{9}$$

Warunki pierwszego rzędu mają postać

$$\frac{1}{2} \frac{1}{x_i} = \lambda p_i, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = w.$$

Dzieląc dowolne dwa równania (z pierwszych n) przez siebie uzyskujemy równość

$$\frac{x_i}{x_k} = \frac{p_k}{p_i} \quad \text{skąd otrzymujemy } p_i x_i = p_k x_k \text{ dla dowolnych } i \neq k.$$

Korzystając z ograniczenia otrzymujemy $n p_i x_i = w$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$, skąd $x_i^\star = w/(np_i)$.

Aby sprawdzić warunki drugiego rzędu obliczamy macierz drugiej pochodnej funkcji L otrzymując macierz diagonalną, gdzie na przekątnej stoją wyrazy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2x_i^2} < 0$$

i konsekwentnie jest to macierz ujemnie określona, a więc znaleziony punkt jest maksimum.

[1] Oczywiście jest możliwe przeliczenie wszystkiego dla dokładnie takiej postaci funkcyjnej, ale dlaczego mamy się męczyć.

Zadanie 3 Dynamika w pewnym modelu duopolu Cournota jest zadana następującym układem równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = 3k_1 - k_1 q_1 - \dfrac{k_1}{2} q_2 \\ \dot{q}_2 = 3k_2 - \dfrac{k_2}{2} q_1 - k_2 q_2 \end{cases} \tag{10}$$

gdzie $q_i(t)$ jest wielkością produkcji firm i-tej w chwili t a $k_1, k_2 > 0$ są danymi współczynnikami.

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*4 p*] Zbadać stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim szukamy równowag. W tym celu rozwiązujemy układ równań postaci

$$3k_1 - k_1 q_1 - \frac{k_1}{2} q_2 = 0$$
$$3k_2 - \frac{k_2}{2} q_1 - k_2 q_2 = 0$$

skąd otrzymujemy $(q_1^\star, q_2^\star) = (2, 2)$.

(b) Badanie stabilności równowagi sprowadza się do znalezienia linearyzacji i sprawdzeniu znaku części rzeczywistych wartości własnych. Macierz Jacobiego ma postać

$$J(q_1^\star, q_2^\star) = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_1/2 \\ -k_2/2 & -k_2 \end{bmatrix}.$$

Obliczając $\det\ J(q_1^\star, q_2^\star) = 3k_1 k_2/4 > 0$ i $\mathrm{tr}\ J(q_1^\star, q_2^\star) = -(k_1 + k_2) < 0$ wnioskujemy, że znaki części rzeczywistych obu wartości własnych są ujemne i konsekwentnie równowaga jest asymptotycznie stabilna.

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = x_1 + \dot{x}_2 \end{cases} \tag{11}$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne.

Uwaga: zastosować podstawienie aby sprowadzić układ (11) do układu trzech liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim stosujemy typowe podstawienie wprowadzając nowe funkcje $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ i $y_3 = \dot{x}_2$. Układ (11) w nowych zmiennych przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_3 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_1 + y_3 \end{cases} \tag{12}$$

Układ (12) rozwiązuje się dalej standardowo. Macierz współczynników ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Wielomian charakterystyczny jest postaci $w(r) = -(r+1)r(r-3)$, skąd otrzymujemy trzy wartości własne $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ i $r_3 = 3$. Obliczamy wektory własne otrzymując

$$h_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Stąd rozwiązanie ogólne jest postaci

$$\begin{cases} y_1 = x_1 = 2C_1 \mathrm{e}^{-t} + 6C_3 \mathrm{e}^{3t} \\ y_2 = x_2 = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 + C_3 \mathrm{e}^{3t} \end{cases} \tag{15}$$

Niestety, do egzaminu wkradł się błąd. Poniżej sformułowanie zadania dokładnie tak jak na temacie egzaminacyjnym, razem z rozwiązaniem.

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, która jest ciągła i quasi-wklęsła. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym i domkniętym. Rozważamy zadanie optymalizacji postaci

$$\max_{x \in U} f(x).$$

Niepusty zbiór $O \subset U$rozwiązań tego zadania to zbiór postaci $O = \{x \in U : f(x) \geq f(x'), x' \in U\}$.

(a) [*6 p*] Pokazać, że zbiór rozwiązań O jest wypukły. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

Rzeczywiście, zgodnie z tw. Bolzano-Weierstrassa wiemy, że zbiór O jest niepusty. Zbiór ten nie musi być jednak wypukły jeżeli zbiór U nie jest wypukły. Aby to zobaczyć wystarczy rozważyć następujący przykład.

Niech $U = [0, 1] \cup [2, 3]$. Proszę zauważyć, że zbiór ten nie jest wypukły! Rozważmy funkcję stałą, quasi-wklęsłą $f(x) = 0$. Jest jasne, że $O = U$ i konsekwentnie nie jest wypukły.

Właściwe zadanie powinno mieć jedno dodatkowe założenie.

Zadanie 5* Niech dana będzie funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, która jest ciągła i quasi-wklęsła. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym, domkniętym i wypukłym. Rozważamy zadanie optymalizacji postaci

$$\max_{x \in U} f(x).$$

Niepusty zbiór $O \subset U$ rozwiązań tego zadania to zbiór postaci $O = \{x \in U : f(x) \geq f(x'), x' \in U\}$.

(a) [*6 p*] Pokazać, że zbiór rozwiązań O jest wypukły. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

Rzeczywiście, zgodnie z tw. Bolzano-Weierstrassa wiemy, że zbiór O jest niepusty. Niech $\hat{x} \in O$ i oznaczmy przez $\hat{y}$ wartość funkcji f w tym punkcie, tj. $\hat{y} = f(\hat{x})$. Wtedy jednak zbiór O wyraża się jako

$$O = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \hat{y}\}.$$

Ponieważ oba zbiory są wypukłe, pierwszy zgodnie z treścią zadania a drugi ponieważ funkcja f jest quasi-wklęsła, więc O również jest wypukły jako przecięcie zbiorów wypukłych.