

# Ekonomia Matematyczna 25.01.2012

1	2	3	4	5	6
					×

**Zadanie 1** Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(3)} - 3\ddot{x} - 2x = 2t - 5 \quad (1)$$

(a) [5 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [1 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie szczególny dla warunku początkowego  $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 2, \ddot{x}(0) = 1$ .

**Zadanie 2** Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci

$$u(x) = \sqrt{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (2)$$

Ceny dóbr wynoszą odpowiednio  $p_i > 0, i = 1, \dots, n$ , a konsument dysponuje bogactwem  $w$ .

(a) [6 p] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki wystarczające istnienia maksimum.

**Zadanie 3** Dynamika w pewnym modelu duopolu Cournota jest zadana następującym układem równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = 3k_1 - k_1 q_1 - \frac{k_1}{2} q_2 \\ \dot{q}_2 = 3k_2 - \frac{k_2}{2} q_1 - k_2 q_2 \end{cases} \quad (3)$$

gdzie  $q_i(t)$  jest wielkością produkcji firm  $i$ -tej w chwili  $t$  a  $k_1, k_2 > 0$  są danymi współczynnikami.

(a) [2 p] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [4 p] Zbadać stabilność równowag.

**Zadanie 4** Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = x_1 + \dot{x}_2 \end{cases} \quad (4)$$

(a) [6 p] Podać rozwiązanie ogólne.

*Uwaga: zastosować podstawienie aby sprowadzić układ (4) do układu trzech liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach.*

**Zadanie 5\*** Niech dana będzie funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest ciągła i quasi-wklęsła. Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem ograniczonym i domkniętym. Rozważamy zadanie optymalizacji postaci

$$\max_{x \in U} f(x).$$

Niepusty zbiór  $O \subset U$  rozwiązań tego zadania to zbiór postaci  $O = \{x \in U : f(x) \geq f(x'), x' \in U\}$ .

(a) [6 p] Pokazać, że zbiór rozwiązań  $O$  jest wypukły. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.