Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 08.06.2011

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Zachowanie ceny p w czasie jest zadane równaniem różniczkowym postaci

$$\ddot{p} + 3\dot{p} + 2p = 10 - \mathrm{e}^{-3t}. \tag{1}$$

(a) [*4 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

(b) [*2 p*] Uzasadnić, że cena dobra będzie w długim okresie zbiegała do wartości 5.

Rozwiązanie.

(a) Rozwiązujemy równanie jednorodne postaci

$$\ddot{p} + 3\dot{p} + 2p = 0.$$

Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2), \tag{2}$$

a zatem mamy dwa pierwiastki postaci $r_1 = -1$ i $r_2 = -2$. Rozwiązanie równania jednorodnego jest postaci

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}. \tag{3}$$

Aby rozwiązać równanie niejednorodne poszukujemy rozwiązania szczególnego postaci $u(t) = a + b\mathrm{e}^{-3t}$. Mamy zatem

$$\dot{u} = -3b\mathrm{e}^{-3t} \quad \text{oraz} \quad \ddot{u} = 9b\mathrm{e}^{-3t}.$$

Wstawiając u do równania niejednorodnego (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 9b\mathrm{e}^{-3t} + 3(-3b\mathrm{e}^{-3t}) + 2(a + b\mathrm{e}^{-3t}) &= 10 - \mathrm{e}^{-3t} \\ 2a + \mathrm{e}^{-3t}(9b - 9b + 2b) &= 10 - \mathrm{e}^{-3t} \\ 2a + 2b\mathrm{e}^{-3t} &= 10 - \mathrm{e}^{-3t}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy $a = 5$ i $b = -1/2$.

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + 5 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}. \tag{4}$$

(b) Zachodzi oczywiście

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + 5 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right) = 5,$$

co kończy zadanie.

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci $u(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1^2\, x_2}$. Ceny dóbr wynoszą odpowiednio p_1 i p_2 a konsument dysponuje bogactwem w.

(a) [*4 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta dla dobra x_1.

(a) [*2 p*] Znaleźć cenę równowagi na rynku dobra x_1 jeżeli funkcja popytu jest zadana jako $S(p_1) = 2wp_1/3$.

Rozwiązanie.

(a) Rozwiązujemy typowe zagadnienie optymalizacji z ograniczeniami. Funkcja Lagrange'a jest postaci

$$L(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w) = x_1^{1/2}\, x_2^{1/4} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w).$$

Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{x_2^{1/4}}{2x_1^{1/2}} - \lambda p_1,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{x_1^{1/2}}{4x_2^{3/4}} - \lambda p_2.$$

Zatem warunki pierwszego rzędu są postaci

$$\frac{x_2^{1/4}}{2x_1^{1/2}} = \lambda p_1 \quad \text{i} \quad \frac{x_1^{1/2}}{4x_2^{3/4}} = \lambda p_2. \tag{5}$$

Dzieląc stronami (5) i porządkując otrzymujemy $p_1 x_1 = 2p_2 x_2$. Wstawiając uzyskaną równość do warunku ograniczającego otrzymujemy

$$w = p_1 x_1 + \frac{1}{2} p_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{2w}{3p_1}.$$

(b) Cena w równowadze musi spełniać

$$\begin{aligned} D(p_1) &= S(p_1) \\ \frac{2w}{3p_1} &= \frac{2w}{3} p_1 \\ \frac{1}{p_1} &= p_1 \\ p_1 &= 1 \quad \text{korzystając z założenia } p_1 > 0. \end{aligned}$$

Zadanie 3 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2} x_1 - x_2 - \frac{3}{2} x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 - 3x_3 \end{cases} \tag{6}$$

(a) [*6 p*] Znaleźć rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Zapisujemy układ w postaci macierzowej

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Następnie obliczamy wielomian charakterystyczny

$$\begin{aligned} w(r) &= \left((-r-3)\,(-r-1) + \frac{3}{2} \right) (-r-1) - \frac{-r-3}{2} - 1 \\ &= -\,(r+1)\,(r+2)^2, \end{aligned}$$

skąd wartości własne wynoszą $r_1 = -1$ i $r_2 = -2$ (krotność algebraiczna 2).

Mając wartości własne obliczamy wektory własne i serie jeżeli zachodzi taka potrzeba. Dla $r_1 = -1$ mamy $Ah_1 = -h_1$ co prowadzi do układu równań o macierzy rozszerzonej postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest postaci $h_{11} = 3s$, $h_{1,2} = 2s$, $h_{13} = s$, $s \in \mathbb{R}$. Przyjmując $s = 1$ otrzymujemy wektor własny $h_1 = [3, 2, 1]$.

Dla $r_2 = -2$ otrzymujemy $Ah_2 = -2h_2$ co prowadzi do układu równań o macierzy rozszerzonej postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne jest postaci $h_{2i} = s$, $i = 1, 2, 3$ i $s \in \mathbb{R}$. Przyjmując $s = 1$ otrzymujemy drugi wektor własny postaci $h_2 = [1, 1, 1]$. Niestety krotność geometryczna wartości r_2 wynosi 1, musimy więc doliczyć jeden wektor serii korzystając z równości $Ah_3 = -2h_3 + h_2$ co prowadzi do układu równań o macierzy rozszerzonej postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne jest postaci $h_{31} = s$, $h_{32} = 1 + s$, $h_{33} = s$, $s \in \mathbb{R}$. Przyjmując $s = 0$ otrzymujemy wektor serii postaci $h_3 = [0, 1, 0]$.

Posiadając bazę przestrzeni odpowiadającą wartościom własnym możemy wypisać rozwiązanie ogólne, które jest postaci

$$x(t) = C_1 h_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 h_2 \mathrm{e}^{-2t} + C_3 (t h_2 + h_3) \mathrm{e}^{-2t}.$$

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 1 - x_2 \end{cases} \tag{7}$$

(a) [2 *p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [2 *p*] Obliczyć macierz Jacobiego.

(c) [2 *p*] Korzystając z macierzy Jacobiego sprawdzić stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim poszukujemy równowag, zob. rys. 1(a). W tym celu rozwiązujemy układ równań postaci

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 - x_2 = 0 \\ x_1^2 - 1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Układ ten prowadzi do pojedynczego równania postaci $1 - x_1^2 = x_1^2 - 1$ skąd $x_1^2 = 1$ skąd mamy jedyne dwa rozwiązania postaci $A = (-1, 0)$ i $B = (1, 0)$.

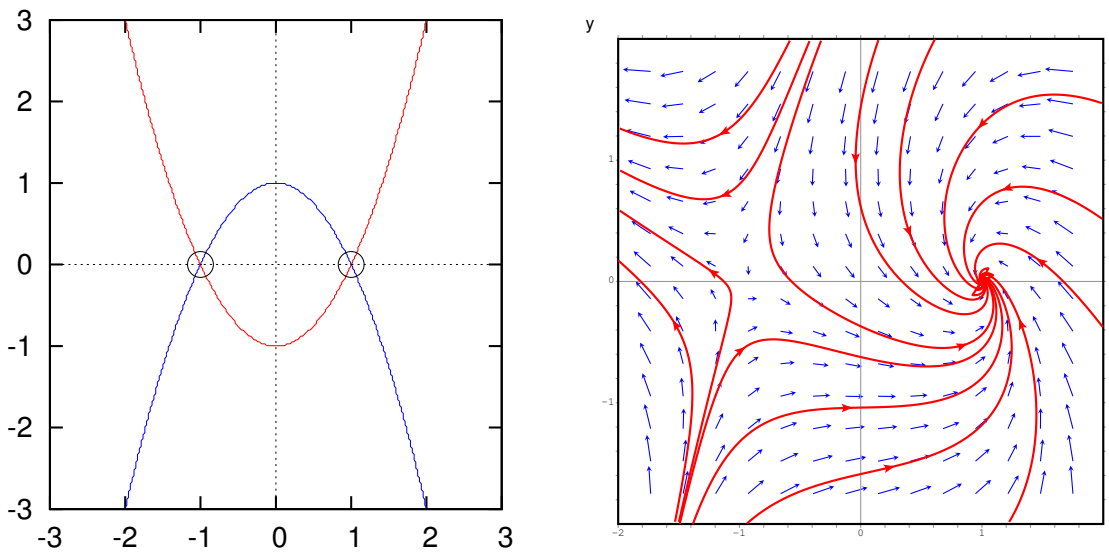
(b) Obliczamy linearyzację układu (7) otrzymując

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2x_1 & -1 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Następnie sprawdzamy stabilność rozwiązań otrzymując

$$J(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad J(B) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczając wartości własne (albo korzystając z wyznaczników i śladów macierzy) dochodzimy do wniosku, że równowaga A jest niestabilna (siodło) oraz równowaga B jest stabilna, por. rys. 1(b).



(a) równowagi (b) portret fazowy

Rysunek 1: Wykresy pomocnicze.

Zadanie 5* Rozpatrujemy rynek doskonale konkurencyjny. Krzywa popytu jest dana funkcją $D(p) = \beta(p - \overline{p})$, gdzie $\beta < 0$ i $\overline{p} > 0$. Funkcja podaży jest postaci $S(p) = p/c$, gdzie $c > 0$ jest stałym kosztem krańcowym. Niech p_0 będzie ceną w równowadze, a więc ceną przy której zachodzi $S(p_0) = D(p_0)$. Nadwyżka konsumenta jest dana jako

$$\text{CS} = \int_{p_0}^{\overline{p}} D(p)dp.$$

(a) [*6 p*] Pokazać, że jeżeli w wyniku wprowadzenia nowej technologii, która prowadzi do obniżenia kosztów krańcowych do nowego niższego poziomu $c' < c$, nadwyżka konsumenta CS wzrośnie. Odpowiedź uzasadnić przy pomocy odpowiedniego **obliczenia**.

Rozwiązanie.

(a) Intuicyjnie własność ta jest oczywista. Wprowadzenie nowej technologii prowadzi do możliwości produkowania niższym kosztem. Firma może więc obniżyć cenę dobra (a co za tym idzie wszystkie firmy pozostające na rynku[1]. To prowadzi do bardziej stromej krzywej podaży, a więc do niższych cen i większego wolumenu sprzedaży co prowadzi do zwiększenia nadwyżki konsumenta, por. rys. 2.

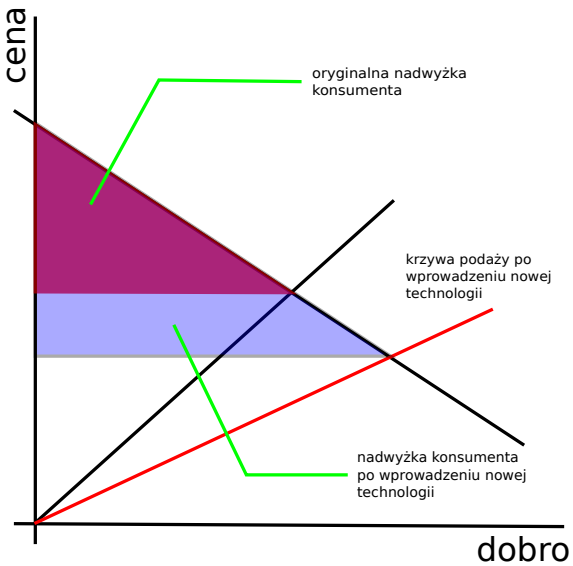
Technicznie możemy zapisać to w następujący sposób. Niech $p' < p_0$ będzie nową ceną w równowadze. mamy

[1] Zakładamy, że technologia może być imitowana przez dowolną firmę.

wtedy

$$CS' = \int_{p'}^{\hat{p}} D(p)dp = \int_{p'}^{p_0} D(p)dp + \int_{p_0}^{\hat{p}} D(p)dp > \int_{p_0}^{\hat{p}} D(p)dp = CS,$$

gdzie nierówność wynika z faktu, że $\int_{p'}^{p_0} D(p)dp > 0$, bo oczywiście $D(p) > 0$.



Rysunek 2: Zmiana nadwyżki konsumenta w wyniku wprowadzenia nowej technologii.