Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

1	2	3	4	5	6
					×

Ekonomia Matematyczna 28.01.2011

Zadanie 1 Dane jest następujące równanie różniczkowe:

$$x^{(4)} + 7x^{(3)} + 17\ddot{x} + 17\dot{x} + 6x = 6t^2 + 40t + 57. \tag{1}$$

(a) [*6 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$w(r) = r^4 + 7\,r^3 + 17\,r^2 + 17\,r + 6 = (r+1)^2\ (r+2)\ (r+3)\,, \tag{2}$$

skąd mamy $r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_1 = -1$ i ostatni pierwiastek ma krotność 2. Zatem rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + C_3\mathrm{e}^{-t} + C_4 t\mathrm{e}^{-t}. \tag{3}$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) wprowadzamy funkcję testową postaci $u(t) = at^2 + bt + c$ i podstawiamy ją do równania (1) otrzymując

$$34a + 17(2at + b) + 6(at^2 + bt + c) = 6t^2 + 40t + 57. \tag{4}$$

Z porównania współczynników wielomianów otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 6a = 6 \\ 34a + 6b = 40 \\ 6c + 51b = 57 \end{cases} \tag{5}$$

skąd mamy $a = b = c = 1$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + C_3\mathrm{e}^{-t} + C_4 t\mathrm{e}^{-t} + t^2 + t + 1. \tag{6}$$

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Ceny dóbr wynoszą odpowiednio p_1 i p_2 a konsument dysponuje bogactwem w.

(a) [*6 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta. Proszę sprawdzić warunki wystarczające istnienia maksimum.

Rozwiązanie.

(a) Ponieważ $\partial u/\partial x_i > 0$ dla $i = 1, 2$ więc możemy stosować twierdzenie Lagrange'a (a nie Kuhna-Tuckera). Funkcja Lagrange'a L ma postać

$$L(x) = u(x) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w). \tag{7}$$

Warunki pierwszego rzędu mają postać

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - p_1\lambda &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - p_2\lambda &= 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 &= w \end{aligned}$$

Dzieląc pierwsze dwa równania przez siebie i przekształcając otrzymujemy $x_1p_1^2 = x_2p_2^2$. Korzystając z ograniczenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= w \\ \frac{x_2p_2^2}{p_1} + p_2x_2 &= w \\ x_2 &= \frac{w}{p_2}\frac{p_1}{p_1 + p_2} \end{aligned}$$

oraz

$$x_1 = \frac{w}{p_1} \frac{p_2}{p_1 + p_2}.$$

Aby sprawdzić warunki drugiego rzędu obliczamy macierz drugiej pochodnej funkcji L otrzymując

$$d^2 L(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4{x_1}^{3/2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4{x_2}^{3/2}} \end{bmatrix}$$

skąd wynika, że macierz $d^2 L(x)$ jest określona ujemnie na $\mathbb{R}^2$ więc w szczególności na przestrzeni stycznej do ograniczenia, a więc znaleziony punkt jest maksimum.

Zadanie 3 Równanie określające zachowanie się kapitału w modelu Solowa jest postaci $\dot{k} = sf(k) - \lambda k$, gdzie $k \geq 0$ oznacza kapitał *per capita*, f to funkcja produkcji a parametry $s, \lambda > 0$ mają interpretację ekonomiczną. Niech $f(k) = k^{1/4}$.

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*4 p*] Zbadać stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim szukamy równowag. W tym celu rozwiązujemy równanie $sf(k) - \lambda k = 0$ otrzymując

$$\begin{aligned} sk^{1/4} - \lambda k &= 0 \\ sw - \lambda w^4 &= 0 \quad \text{(podstawienie } w^4 = k\text{)} \\ w(s - \lambda w^3) &= 0 \end{aligned}$$

gdzie z ostatniego równania otrzymujemy $w = 0$ co implikuje $k_1 = 0$ oraz $s - \lambda w^3 = 0$ co implikuje $k_2 = (s/\lambda)^{4/3}$.

(b) Badanie stabilności równowag należy przeprowadzić oddzielnie dla równowagi k_1 i k_2. Dla równowagi k_2 analiza jest prosta. Wystarczy obliczyć pochodną pola wektorowego (linearyzację) a następnie zbadać jej znak. Jeżeli oznaczymy $h(k) = sk^{1/4} - \lambda k$ to otrzymamy

$$\frac{dh(k)}{dk} = \frac{s}{4\,k^{3/4}} - \lambda. \tag{8}$$

Podstawiając do wzoru (8) wartość k_2 otrzymujemy

$$\frac{dh(k_2)}{dk} = -\frac{3\lambda}{4} < 0 \tag{9}$$

co (na mocy twierdzenia Lapunowa) gwarantuje lokalną asymptotyczną stabilność równowagi k_2.

Analiza równowagi k_1 jest nieco bardziej skomplikowana, gdyż funkcja $h(k)$ nie jest różniczkowalna w równowadze k_1. Aby wykazać niestabilność równowagi wystarczy wykazać, że funkcja h jest dodatnia na odcinku $(0, \varepsilon)$, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$. To jest jednak oczywiste z trzech powodów: funkcja g przyjmuje w zerze wartość 0, funkcja g jest ciągła (prawostronnie) w 0 a prawostronna granica pochodnej w 0^+ wynosi $+\infty$.

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = x_1 \end{cases} \tag{10}$$

(a) [*6 p*] Podać rozwiązanie ogólne. Uwaga: zastosować podstawienie aby sprowadzić układ (10) do układu trzech liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim stosujemy typowe podstawienie wprowadzając dwie nowe funkcje $y_1 = x_2$ i $y_2 = \dot{x}_2$. Układ (10) w nowych zmiennych przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = x_1 \end{cases} \tag{11}$$

Układ (11) rozwiązuje się dalej standardowo. Macierz współczynników ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Wielomian charakterystyczny jest postaci $w(r) = -(r+1)r(r-2)$, skąd otrzymujemy trzy wartości własne $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ i $r_3 = 2$. Obliczamy wektory własne otrzymując

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Stąd rozwiązanie ogólne jest postaci

$$\begin{cases} x_1 = C_3 4\,\mathrm{e}^{2\,t} + C_1\mathrm{e}^{-t} \\ y_1 = x_2 = C_3\mathrm{e}^{2\,t} + C_2 + C_1\mathrm{e}^{-t} \end{cases} \tag{14}$$

Zadanie 5* Dana jest funkcja różniczkowalna w sposób ciągły, która jest zdefiniowana dla liczb nieujemnych, $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Funkcja x na odcinku $[0, 1]$ jest zdefiniowana jako identyczność, tj. dla $t \in [0, 1]$ jest $x(t) = t$. Dla $t > 1$ funkcja x spełnią następujące równanie różniczkowe (wyrażenia w nawiasach są argumentami funkcji x):

$$\dot{x}(t) = x(t) - x(t-1). \tag{15}$$

(a) [*6 p*] Znaleźć funkcję x dla wszystkich $t \geq 0$. Odpowiedź dokładnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

(a) Funkcja jest podana na odcinku $t \in [0, 1]$ i jest tam zdefiniowana jako identyczność, tj. $x(t) = t$. To powoduje, że na odcinku $t \in [1, 2]$ równanie (15) redukuje się do postaci

$$\dot{x}(t) = x(t) - (t-1). \tag{16}$$

Równanie to można łatwo rozwiązać. Równanie jednorodne jest postaci

$$\dot{x}(t) = x(t), \tag{17}$$

skąd rozwiązanie ogólne równania (17) jest postaci $x(t) = C\mathrm{e}^t$. Rozwiązanie ogólne równania (16) otrzymujemy znajdując rozwiązanie szczególne postaci $\alpha t + \beta$. Podstawiając do równania (16) otrzymujemy $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ skąd rozwiązanie ogólne jest postaci

$$x(t) = C\mathrm{e}^t + t. \tag{18}$$

Ponieważ w założeniach zadania jest założenie, że funkcja x jest klasy C^1 więc, w szczególności, musi być ciągła. Z tego wynika, że jest również ciągła w punkcie $t = 1$, a więc musi spełniać warunek $x(1) = 1$. Z warunku tego możemy wyznaczyć wartość parametru C. Proste obliczenia prowadzą do konkluzji, że $C = 0$, skąd szczególne rozwiązanie musi być postaci $x(t) = t$ *na odcinku* $[1, 2]$! Zatem znaleźliśmy funkcję x na odcinku $[0, 2]$.

Powtarzając powyższe rozumowanie na odcinku $[2, 3]$ dochodzimy do konkluzji, że identyczna definicja daje się przedłużać również na ten odcinek. Indukcyjnie dochodzimy do wniosku, że poprawną definicją funkcji dla dowolnego $t \geq 0$ jest $x(t) = t$.