Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 13.12.2010

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Jest dany układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \tag{1}$$

(a) [*6 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Technika rozwiązania polega na znalezieniu bazy, w której macierz układu ma postać klatkową Jordana (wykład 1). Macierz układu jest postaci

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wielomian charakterystyczny:

$$w(r) = ((2-r)\ (4-r)+1)\ (2-r) = -(r-3)^2\ (r-2)$$

skąd otrzymujemy dwie wartości własne $r_1 = 2$ i $r_2 = 3$, z krotnością algebraiczną 2.

Obliczamy wektor własny dla wartości własnej $r_1 = 2$. Otrzymujemy układ o macierzy rozszerzonej postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

skąd łatwo wyznaczamy wektor własny $h_1 = [1, 1, 1]$.

Następnie obliczamy wektory własne dla wartości własnej $r_2 = 3$. Otrzymujemy macierz rozszerzoną układu postaci

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

skąd łatwo wyznaczamy dwa wektory własne postaci $h_2 = [0, 1, 1]$ i $h_3 = [1, 1, 0]$ a więc krotność geometryczna wartości r_2 również wynosi 2.

Rozwiązanie jest zatem postaci

$$x = C_1 h_1 \mathrm{e}^{2t} + C_2 h_2 \mathrm{e}^{3t} + C_3 h_3 \mathrm{e}^{3t}.$$

Zadanie 2 Preferencje konsumenta są opisane funkcją użyteczności postaci $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2x_2$. Ceny dóbr wynoszą odpowiednio p_1 i p_2 a konsument dysponuje bogactwem w.

(a) [*6 p*] Znaleźć funkcję popytu konsumenta.

Rozwiązanie.

(a) Zaczynamy od stworzenia funkcji Lagrange'a postaci

$$L(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w).$$

Warunki pierwszego rzędu wyglądają w następujący sposób

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2 - \lambda p_2 = 0\\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= w\end{aligned}$$

W kolejności: z drugiego równania wyznaczamy λ, wstawiamy do pierwszego równania, wyznaczamy x_1, wstawiamy do trzeciego równania i wyznaczamy x_2 otrzymując

$$x_1 = \left(\frac{p_2}{4p_1}\right)^2, \quad x_2 = \frac{1}{p_2}\left(w - \frac{p_2^2}{16p_1}\right).$$

Zadanie 3 Rozpatrujemy rynek dwóch dóbr o cenach odpowiednio p_1 i p_2. Podaż pierwszego dobra wynosi $S_1(p_1) = p_1$ a podaż drugiego dobra wynosi $S_2(p_2) = 2p_2$. Popyt na pierwsze i drugie dobro (tak długo jak jest nieujemny) wynosi odpowiednio

$$D_1(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1} - 2p_2 \quad \text{i} \quad D_2(p_1, p_2) = \frac{1}{2p_2} - p_1,$$

co modeluje wpływ cen jednego produktu na popyt na drugi. Zachowanie się cen jest wprost proporcjonalne to nadwyżki popytu i jest modelowane poprzez następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases}\dot{p}_1 = D_1(p_1, p_2) - S_1(p_1) = \dfrac{1}{p_1} - 2p_2 - p_1\\ \dot{p}_2 = D_2(p_1, p_2) - S_2(p_2) = \dfrac{1}{2p_2} - p_1 - 2p_2\end{cases} \tag{2}$$

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*4 p*] Zbadać lokalną stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim szukamy równowag a więc punktów krytycznych podanego pola wektorowego. Mamy zatem

$$\begin{cases}\dfrac{1}{p_1} - 2p_2 - p_1 = 0\\ \dfrac{1}{2p_2} - p_1 - 2p_2 = 0\end{cases}$$

Wyznaczając z drugiego równania p_1 i wstawiając do pierwszego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{2p_2}{1-4p_2^2} - \frac{1-4p_2^2}{2p_2} &= 2p_2\\ 4p_2^2 - (1-4p_2^2)^2 &= 4p_2^2(1-4p_2^2)\\ 4p_2^2 &= \frac{1}{2}\\ p_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Korzystając z pierwszego równania otrzymujemy $p_1 = 1/\sqrt{2}$. Jedyna równowaga to punkt

$$\hat{p} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Aby zbadać lokalną stabilność równowagi $\hat{p}$ obliczamy linearyzację pola wektorowego w równowadze. Mamy

$$Df(p) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{p1^2} - 1 & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2\,p2^2} - 2 \end{bmatrix}$$

i konsekwentnie

$$Df(\hat{p}) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wielomian charakterystyczny otrzymując

$$w(r) = (-r-6)\,(-r-3) - 2$$

skąd mamy wartości własne postaci

$$r_1 = -\frac{\sqrt{17}+9}{2} \quad \text{i} \quad r_2 = \frac{\sqrt{17}-9}{2}.$$

Nietrudno zauważyć, że obie wartości własne są ujemne a więc na mocy twierdzenia Lapunowa równowaga jest lokalnie asymptotycznie stabilna.

Zadanie 4* Popyt konsumenta na pierwsze dobro (będący rozwiązaniem zadania optymalizacji) jest dany funkcją $x(p_1, p_2, w)$, gdzie p_ℓ, $\ell = 1, 2$ są cenami dóbr a w to bogactwo.

Niech będą ustalone ceny $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ i bogactwo $\hat{w}$. Wiemy, że w tej sytuacji, liniowe przybliżenie zmiany popytu przy wzroście ceny pierwszego dobra i drugiego dobra wynosi odpowiednio $-1/2$ i $-1/3$.

(a) [*6 p*] Ile wynosi liniowe przybliżenie zmiany popytu przy wzroście bogactwa? Odpowiedź *bardzo* dokładnie uzasadnić!

Rozwiązanie.

(a) Przede wszystkim zauważamy[1], że popyt x musi być jednorodny stopnia 0. Skoro tak to możemy skorzystać z twierdzenia Eulera dla funkcji jednorodnej postaci (dla funkcji jednorodnej stopnia 0)

$$\frac{\partial x(\hat{p}, \hat{w})}{\partial p_1}\hat{p}_1 + \frac{\partial x(\hat{p}, \hat{w})}{\partial p_2}\hat{p}_2 + \frac{\partial x(\hat{p}, \hat{w})}{\partial w}\hat{w} = 0 \tag{3}$$

skąd bezpośrednio otrzymujemy

$$\frac{\partial x(\hat{p}, \hat{w})}{\partial w} = \frac{1}{\hat{w}}\left(\frac{\hat{p}_1}{2} + \frac{\hat{p}_2}{3}\right).$$

Zadanie 5 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x}\, x^2 t^2 = x^3 t + x t^3 \tag{4}$$

(a) [*6 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Podane równanie po obu stronach zawiera wielomiany jednorodne tego samego stopnia. Mamy więc

$$\dot{x} x^2 t^2 = x^3 t = x t^3$$
$$\frac{1}{t^4}\dot{x}\left(\frac{x}{t}\right)^2 = \frac{1}{t^4}\left[\left(\frac{x}{t}\right)^3 + \left(\frac{x}{t}\right)\right].$$

[1] Albo wiemy to z wykładu mikroekonomii albo zauważamy, że pomnożenie przez tę sama liczbę dodatnią zarówno obu cen jak i bogactwa nie zmienia zbioru budżetowego i konsekwentnie rozwiązania.

Stosujemy podstawienie $x = ut$ skąd $\dot{x} = u + t\dot{u}$ i konsekwentnie

$$
\begin{aligned}
(u + t\dot{u})\, u^2 &= u^3 + u \\
tu\dot{u} &= 1 \\
u\dot{u} &= \frac{1}{t} \\
udu &= \frac{dt}{t} \\
\int udu &= \int \frac{dt}{t} \\
\frac{1}{2}u^2 + C &= \ln|t|
\end{aligned}
$$

Ostatnie równanie zadaje zależność pomiędzy u i t. Mnożąc obie strony przez t^2 otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(ut)^2 + Ct^2 &= t^2 \ln|t| \\
x^2 &= 2\left(t^2 \ln|t| - Ct^2\right)
\end{aligned}
$$