Nazwisko i Imię **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 2010.09.27

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Konsument kieruje się w swoich wyborach funkcją użyteczności postaci $u(x_1, x_2) = 2(x_1)^{1/3}(x_2)^{2/3}$. Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_1 > 0$ i $p_2 > 0$, a konsument dysponuje bogactwem w wielkości $w > 0$.

(a) [*4 p*] Wyznaczyć optymalny koszyk konsumenta.

(b) [*2 p*] Jeżeli w równowadze konsument kupuje dwa razy więcej dobra drugiego, to co można powiedzieć o cenach dóbr p_1 i p_2?

Zadanie 2 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 5t^2. \tag{1}$$

(a) [*4 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne równania (1).

(a) [*2 p*] Podać rozwiązanie szczególne równania (1) spełniające warunek początkowy $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$.

Zadanie 3 Rozkład strategii czystych w populacjach grających w grę antykoordynacyjną posługujących się algorytmem imitacji oraz testowania jest dany następującym układem równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - y \\ \dot{y} = y(1-y)(1-2x) \end{cases} \tag{2}$$

Układ (2) rozpatrujemy **tylko (!)** na kwadracie $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*3 p*] Zbadać typ równowag (siodło, źródło, ognisko) lub stwierdzić, że na podstawie wprowadzonych twierdzeń nie można określić stabilności równowagi.

(c) [*1 p*] Naszkicować portret fazowy (tylko na wspomnianym zbiorze!).

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 8x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 4x_2 \end{cases} \tag{3}$$

(a) [*6 p*] Znaleźć rozwiązanie ogólne.

Zadanie 5 Niech dana będzie funkcja klasy C^1 spełniająca warunek początkowy $x(0) = 0$ i równanie różniczkowe postaci $\dot{x} = (1 + x^2)t$.

(a) [*3 p*] Pokazać, że punkt $t = 0$ jest minimum globalnym funkcji $x(t)$.

(b) [*3 p*] Pokazać, że dla dowolnego t funkcja $x(t)$ jest wypukła.

Uwaga: Zadanie można wykonać bez rozwiązywania równania różniczkowego.