Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 2010.09.27

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Konsument kieruje się w swoich wyborach funkcją użyteczności postaci $u(x_1, x_2) = 2(x_1)^{1/3}(x_2)^{2/3}$. Ceny dóbr wynoszą odpowiednio $p_1 > 0$ i $p_2 > 0$, a konsument dysponuje bogactwem w wielkości $w > 0$.

(a) [*4 p*] Wyznaczyć optymalny koszyk konsumenta.

(b) [*2 p*] Jeżeli w równowadze konsument kupuje dwa razy więcej dobra drugiego, to co można powiedzieć o cenach dóbr p_1 i p_2?

Rozwiązanie.

(a) Tworzymy funkcję Lagrangea postaci

$$L(x) = u(x) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w).$$

Warunki pierwszego rzędu są postaci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = w \end{cases}$$

Dzieląc stronami pierwsze równania i obliczając pochodne otrzymujemy równanie $x_2p_2 = 2x_1p_1$. Wstawiając je do równania trzeciego i obliczając x_1 otrzymujemy $x_1 = w/(3p_1)$. Konsekwentnie $x_2 = 2w/(3p_2)$.

(b) Jeżeli konsument w równowadze kupuje dwa razy więcej dobra drugiego, tj. $x_2 = 2x_1$, i konsekwentnie

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ \frac{2w}{3p_2} &= 2\frac{w}{3p_1} \\ p_2 &= p_1 \end{aligned}$$

a więc ceny muszą być równe. ■

Zadanie 2 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 5t^2. \tag{1}$$

(a) [*4 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne równania (1).

(a) [*2 p*] Podać rozwiązanie szczególne równania (1) spełniające warunek początkowy $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$.

Rozwiązanie.

(a) Rozwiązujemy równanie jednorodne postaci $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 5t^2$. Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(r) = r^2 + 2\,r + 5 \quad \text{skąd } r = -1 \pm 2i.$$

Rozwiązanie równania jednorodnego jest zatem postaci

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\big).$$

Aby uzyskać rozwiązanie równania niejednorodnego przyjmujemy funkcję testową postaci $u = at^2 + bt + c$. Wstawiając ją do równania (1) otrzymujemy równość dwóch wielomianów

$$5at^2 + (5b = 4a)t + (5c + 2b + 2a) = 5t^2$$

skąd tworzymy układ równań liniowych i rozwiązujemy otrzymując

$$a = 1, \quad b = -\frac{4}{5}, \quad c = -\frac{2}{25}.$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) jest postaci:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\big) + t^2 - \frac{4}{5}t - \frac{2}{25}.$$

(b) Aby znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy, używamy rozwiązania ogólnego wstawiając go do warunku początkowego. Uzyskujemy układ równań postaci

$$\begin{cases} C_2 - \dfrac{2}{25} = 0 \\ 2C_1 - C_2 - \dfrac{4}{5} = 0 \end{cases}$$

skąd $C_1 = 11/25$ i $C_2 = 2/25$. ■

Zadanie 3 Rozkład strategii czystych w populacjach grających w grę antykoordynacyjną posługujących się algorytmem imitacji oraz testowania jest dany następującym układem równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - y \\ \dot{y} = y(1-y)(1-2x) \end{cases} \tag{2}$$

Układ (2) rozpatrujemy **tylko (!)** na kwadracie $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

(a) [*2 p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [*3 p*] Zbadać typ równowag (siodło, źródło, ognisko) lub stwierdzić, że na podstawie wprowadzonych twierdzeń nie można określić stabilności równowagi.

(c) [*1 p*] Naszkicować portret fazowy (tylko na wspomnianym zbiorze!).

Rozwiązanie.

(a) Aby znaleźć wszystkie równowagi rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 1 - x - y = 0 \\ y(1-y)(1-2x) = 0 \end{cases}$$

Układ ten jest na tyle prosty, że można łatwo znaleźć, że jedyne rozwiązania w rozważanym zbiorze to punkty $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$ oraz $c = (1/2, 1/2)$.

(b) Aby sprawdzić stabilność rozwiązań obliczamy linearyzację układu (2) otrzymując:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2\,y^2 - 2\,y & (4\,x - 2)\,y - 2\,x + 1 \end{pmatrix}.$$

Następnie dla kolejnych punktów stosujemy twierdzenie Lapunowa o stabilności. W szczególności dla punktów a i b otrzymujemy

$$J(a) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

skąd (co widać bez obliczeń) obie wartości własne to -1, zatem oba punkt są lokalnie asymptotycznie stabilne.

Dla punktu c otrzymujemy

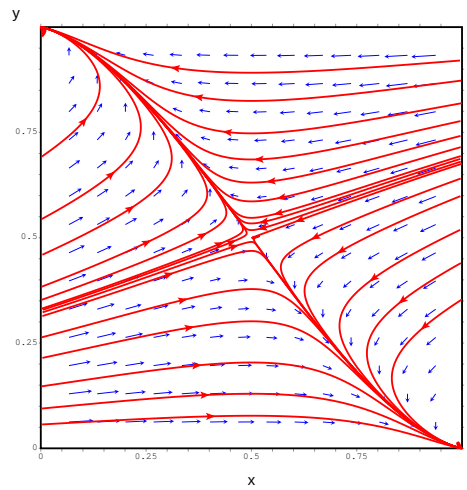
$$J(c) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

skąd wartości własne wynoszą

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} < 0 \quad \text{oraz} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0,$$

a zatem punkt c jest siodłem (niestabilny).

Portret fazowy wygląda tak jak poniżej



Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 8x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 4x_2 \end{cases} \tag{3}$$

(a) [*6 p*] Znaleźć rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie.

(a) Macierz układu równań ma postać:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy wartości własne. Wielomian charakterystyczny ma postać:

$$w(r) = (4-r)\,(8-r) + 4 = r^2 - 12\,r + 36 = (r-6)^2$$

skąd wynika, że istnieje tylko jedna wartość własna $\lambda = 6$ o krotności algebraicznej 2.

Następnie obliczamy wektory własne, w tym celu rozwiązujemy układ równań

$$A - \lambda \mathrm{I} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \tag{4}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5}$$

Konsekwentnie mamy jeden wektor własny postaci $h_1 = [1, 2]^{\mathrm{T}}$, a więc krotność geometryczna wartości własnej $\lambda = 6$ wynosi 1.

Aby znaleźć rozwiązanie musimy uzyskać pełną bazę przestrzeni (sprowadzić macierz do postaci Jordana – jedna klatka). W tym celu obliczamy wektor serii związanej z wartością własną, tj. rozwiązujemy równanie postaci $A - \lambda h_2 = h_1$. Otrzymujemy macierz rozszerzoną układu postaci

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \tag{6}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{7}$$

Ostatecznie jako wektor serii możemy przyjąć $h_2 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$. Stąd rozwiązanie układu (3) jest postaci

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{6t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

co kończy zadanie. ■

Zadanie 5 Niech dana będzie funkcja klasy C^1 spełniająca warunek początkowy $x(0) = 0$ i równanie różniczkowe postaci $\dot{x} = (1 + x^2)t$.

(a) [*3 p*] Pokazać, że punkt $t = 0$ jest minimum globalnym funkcji $x(t)$.

(b) [*3 p*] Pokazać, że dla dowolnego t funkcja $x(t)$ jest wypukła.

Uwaga: Zadanie można wykonać bez rozwiązywania równania różniczkowego.

Rozwiązanie.

(a) Zgodnie z treścią zadania pierwsza pochodna funkcji x przyjmuje wartość 0 w punkcie $t = 0$, jest dodatnia dla $t > 0$ i ujemna dla $t < 0$. Ponieważ z założenia x jest klasy C^1 więc punkt $t = 0$ jest minimum globalnym.

(b) Aby sprawdzić wypukłość funkcji obliczamy drugą pochodną:

$$\ddot{x} = (1 + x^2) + 2x\dot{x}t = (1 + x^2) + 2x(1 + x^2)t^2 = (1 + x^2)(1 + 2t^2 x).$$

Ponieważ $x(t) \geq 0$ więc mamy szacowania:

$$\ddot{x} = (1 + x^2)(1 + 2t^2 x) \geq 1 + 2t^2 \geq 1 > 0$$

i konsekwentnie funkcja x jest wypukła. ■