

Ekonomia Matematyczna 28.01.2010

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Firma produkuje doskonale podzielne dobro y korzystając z jednego doskonale podzielnego czynnika produkcji x , gdzie technologia jest dana poprzez liniową funkcję produkcji $y = f(x) = x$. Jednostkowe koszty czynnika produkcji wynoszą $w \in (0, 1)$.

Wielkość produkcji firmy wpływa na cenę jednostkową produkowanego dobra poprzez funkcję $p(y) = e^{-y}$. Zakładamy, że rynek jest zawsze w równowadze, tj. całość wyprodukowanego dobra jest sprzedana.

(a) [1 p] Zapisać funkcję zysku firmy (dla dowolnej funkcji produkcji oraz dowolnej zależności ceny od wielkości produkcji).

(b) [3 p] Zapisać warunek optymalności pierwszego rzędu w terminach elastyczności ceny od wielkości produkcji.

(c) [2 p] Uzasadnić, że dla podanych konkretnych funkcji f i p istnieje równowaga rynkowa.

Zadanie 2 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \sin(t). \quad (1)$$

(a) [6 p] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Zadanie 3 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (2)$$

(a) [2 p] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [4 p] Zbadać stabilność równowag.

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \quad (3)$$

(a) [4 p] Znaleźć rozwiązanie ogólne.

(b) [2 p] Czy równowaga $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ jest stabilna? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 5 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x}(t) = (x(t) + 1)^3. \quad (4)$$

(a) [4 p] Czy istnieje funkcja wielomianowa stopnia $n \geq 1$, która jest rozwiązaniem powyższego równania? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnić.

(b) [2 p] Podać dowolne rozwiązanie szczególne powyższego równania. Należy uzasadnić, że jest to rozwiązanie.