Nazwisko i Imię	Rozwiązania	**Indeks**	

Ekonomia Matematyczna 28.01.2010

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Firma produkuje doskonale podzielne dobro y korzystając z jednego doskonale podzielnego czynnika produkcji x, gdzie technologia jest dana poprzez liniową funkcję produkcji $y = f(x) = x$. Jednostkowe koszty czynnika produkcji wynoszą $w \in (0, 1)$.

Wielkość produkcji firmy wpływa na cenę jednostkową produkowanego dobra poprzez funkcję $p(y) = \mathrm{e}^{-y}$. Zakładamy, że rynek jest zawsze w równowadze, tj. całość wyprodukowanego dobra jest sprzedana.

(a) [*1 p*] Zapisać funkcję zysku firmy (dla dowolnej funkcji produkcji oraz dowolnej zależności ceny od wielkości produkcji).

(b) [*3 p*] Zapisać warunek optymalności pierwszego rzędu w terminach elastyczności ceny od wielkości produkcji.

(c) [*2 p*] Uzasadnić, że dla podanych konkretnych funkcji f i p istnieje równowaga rynkowa.

Rozwiązanie.

(a) Przychód firmy to $p(y(x))y(x)$ a koszt to wx stąd funkcja zysku jest postaci

$$h(x) = p(y(x))\, y(x) - w\, x. \tag{1}$$

(b) Warunki pierwszego rzędu są postaci

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,[h(x)] &= 0\\
\frac{d}{dx}\,[p(y(x))\, y(x) - w\, x] &= 0\\
\frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} y + p(y)\frac{dy}{dx} - w &= 0\\
\frac{dy}{dx} p \left[1 + \frac{dp}{dy}\,\frac{y}{p(y)}\right] &= w\\
\frac{dy}{dx} p \left[1 + \frac{dp/dy}{p(y)/y}\right] &= w\\
\frac{dy}{dx} p \left[1 + \mathrm{E}_y p(y)\right] &= w.
\end{aligned}$$

(c) Aby uzasadnić istnienie równowagi dla konkretnych podanych funkcji wstawiamy je do (1) otrzymując

$$h(x) = x\mathrm{e}^{-x} - wx. \tag{2}$$

Różniczkując (2) otrzymujemy

$$\frac{dh}{dx} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) - w.$$

Nietrudno zauważyć, że $dh(0)/dx = 1 - w > 0$ ze względu na założenie, $w \in (0, 1)$ oraz $\lim_{x\to\infty} dh(x)/dx = -w < 0$. A zatem z ciągłości funkcji musi istnieć taki punkt $\hat{x}$ w którym $dh(\hat{x})/dx = 0$ oraz granice wynoszą 0^+ i 0^- dla granicy lewostronnej i prawostronnej odpowiednio. Taki punkt jest maksimum lokalnym i poszukiwaną równowagą.

Zadanie 2 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \sin(t). \tag{3}$$

(a) [*6 p*] Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$$

stąd $r = 1$ i rozwiązania bazowe są postaci e^t i $t\mathrm{e}^t$ a rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci

$$x = C_1\mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t.$$

Rozwiązania szczególnego poszukujemy w postaci $u = a\sin(t) + b\cos(t)$. Wstawiając u do (3) i upraszczając otrzymujemy

$$2b\sin(t) - 2a\cos(t) = \sin(t),$$

skąd $a = 0$ i $b = 1/2$. Ostatecznie rozwiązanie ogólne jest postaci

$$x = C_1\mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\cos(t)$$

Zadanie 3 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \tag{4}$$

(a) [2 *p*] Znaleźć wszystkie równowagi.

(b) [4 *p*] Zbadać stabilność równowag.

Rozwiązanie.

(a) Poszukujemy równowag układu (4) a więc punktów spełniających układ postaci

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 - x_2 \\ 0 = -x_1 - x_2 \end{cases} \tag{5}$$

Korzystając z drugiego równania mamy $-x_2 = x_1$ i wstawiając to do równania pierwszego otrzymujemy

$$x_1(x_1 + 1) = 0$$

skąd mamy dokładnie dwa punkty $a = (0,0)$ i $b = (-1,1)$ spełniające układ (5).

(b) Aby zbadać stabilność równowag linearyzujemy układ (4) otrzymując macierz pierwszej różniczki postaci

$$J = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej równowagi obliczamy macierz J oraz jej wartości własne otrzymując dla punktu a

$$J(a) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i wartości własne } r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oraz dla punktu b

$$J(a) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i wartości własne } r = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

W przypadku punktu a istnieje dodatnia wartość własna więc jest to równowaga niestabilna. W przypadku punktu b obie wartości własne są ujemne więc jest to równowaga stabilna.

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \tag{6}$$

(a) [*4 p*] Znaleźć rozwiązanie ogólne.

(b) [*2 p*] Czy równowaga $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ jest stabilna? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

(a) Rozwiązania ogólnego szukamy w sposób standardowy. Macierz współczynników A układu (6) jest postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(r) = \det\left(A - r\mathrm{I}\right) = 2\,(r-1) + ((-r-1)\,(1-r)+1)\,(1-r) = -\,(r-1)\,\left(r^2-2\right),$$

skąd otrzymujemy trzy wartości własne $r_1 = -\sqrt{2}$, $r_2 = 1$ oraz $r_3 = \sqrt{2}$.

Następnie obliczamy wektory własne. Przykładowo dla $r_1 = \sqrt{2}$ otrzymujeym układ równań o następującej macierzy współczynników

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{który sprowadzamy} \\ \text{do postaci bazowej} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

skąd łatwo odnajdujemy, że bazą zbioru rozwiązań może być wektor $[2, 1, \sqrt{2}-1]$.

Podobnie postępujemy w przypadku pozostałych dwóch wartości własnych otrzymując rozwiązanie postaci

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\sqrt{2}t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + C_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}.$$

(b) Ponieważ istnieje dodatnia wartość własna (np. $r_2 = 1$), więc równowaga $\mathbf{0}$ nie jest stabilna.

Zadanie 5 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\dot{x}(t) = (x(t)+1)^3. \tag{7}$$

(a) [*4 p*] Czy istnieje funkcja wielomianowa stopnia $n \geq 1$, która jest rozwiązaniem powyższego równania? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnić.

(b) [*2 p*] Podać dowolne rozwiązanie szczególne powyższego równania. Należy uzasadnić, że jest to rozwiązanie.

Rozwiązanie.

(a) Nie, taki wielomian nie istnieje. Załóżmy, że istnieje taki wielomian i jest stopnia $n \geq 1$. Wtedy po lewej stronie równania (7) będzie stał wielomian stopnia $n-1$ a po prawej stronie równania (7) wielomian stopnia $3n$. Sprzeczność.

(b) Przykładowym rozwiązaniem jest funkcja stała postaci $x(t) = -1$. Funkcja taka jest rozwiązaniem (szczególnym) gdyż po wstawieniu do równania (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-1) &= (-1+1)^3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$