Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Matematyczna 19.11.2009

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Konsument przy dokonywaniu wyborów kieruje się funkcją użyteczności postaci $u(x,y) = x_1 + 4\sqrt{x_2}$. Ceny jednostkowe dóbr są zadane wektorem cen $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_+$ a bogactwo konsumenta oznaczamy przez $w > 0$. Zakładamy, że dobra są doskonale podzielne.

(a) Znaleźć optymalny wybór konsumenta (sprawdzić warunki pierwszego i drugiego rzędu).

(b) Pokazać, że funkcja popytu na drugie dobro $x_2(\mathbf{p})$ jest jednorodna stopna 0.

(c) Jeżeli $\mathbf{x}(w) = (x_1(w), x_2(w))$ jest popytem konsumenta przy ustalnych cenach w zależności od bogactwa w to jak wygląda taka krzywa (wealth expansion path).

Rozwiązanie. Rozwiązujemy standardowe zagadnienie optymalizacji z ograniczeniem w postaci równości. Funkcja Lagrange'a wygląda w następujący sposób

$$L(\mathbf{x}) = x_1 + 4\sqrt{x_2} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w). \tag{1}$$

Różniczkując po każdej ze zmiennych oraz dodając ograniczenie otrzymujemy układ trzech równań następującej postaci

$$\begin{aligned} 1 - \lambda p_1 &= 0 \\ \frac{2}{\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 &= 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 &= w \end{aligned} \tag{2}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $\lambda = 1/p_1$. Wstawiając do drugiego równania otrzymujemy $x_2 = 4(p_1/p_2)^2$. Korzystając z ostatniego ograniczenia otrzymujemy $x_1 = (wp_2 - 4p_1^2)/(p_1p_2)$. Punkt podejrzany o ekstremum oznaczamy przez $\hat{\mathbf{x}}$.

Następnie sprawdzamy warunki drugiego rzędu. W tym celu obliczamy macierz drugiej pochodnej funkcji L otrzymując

$$D^2L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/x_2^{3/2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Przestrzeń styczna do ograniczenia w każdym punkcie (ze względu na liniowość ograniczenia) jest rozpięta na wektorze $[p_2, -p_1]$. Sprawdzamy znak formy kwadratowej $D^2L(\hat{\mathbf{x}})$ na tym wektorze otrzymując

$$[p_2, -p_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\hat{x}_2^{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{bmatrix} = -\frac{p_1^2}{\hat{x}_2^{3/2}} < 0. \tag{4}$$

Zatem forma kwadratowa jest na przestrzeni stycznej określona ujemnie skąd punkt $\hat{\mathbf{x}}$ jest maksimum[1].

Funkcja popytu na drugie dobro jest dana wzorem $\hat{x}_2 = 4(p_1/p_2)^2$ skąd mamy

$$\hat{x}_2(t\mathbf{p}) = 4\left(\frac{tp_1}{tp_2}\right)^2 = 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = \hat{x}_2(\mathbf{p})$$

a zatem funkcja jest jednoroda stopnia 0.

Krzywa wealth expansion path jest oczywiście prostą poziomą, bo popyt na drugie dobro nie zależy od bogactwa a popyt na pierwsze dobro jest liniową rosnącą funkcja bogactwa.

Zadanie 2 Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = t. \tag{5}$$

[1] Proszę zwrócić uwagę, że warunki regularności są automatycznie spełnione!

(a) Podać rzeczywiste rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie. Zaczynamy od rozwiązania równania jedenorodego. Wypisujemy wielomian charakterystyczny

$$w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3. \tag{6}$$

Powyższe równanie ma parę pierwiatków sprzężonych $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$ i $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$. Rozwiązanie równania jednoroednego musi więc być postaci

$$x = \mathrm{e}^t \left(C_1 \sin(t\sqrt{2}) + C_2 \cos(t\sqrt{2}) \right). \tag{7}$$

Aby znaleźć rozwiązanie ogólne równanie niejednorodnego trzeba jeszcze znaleźć dowolne szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego. Rozwiązania tego poszukujemy w postacie $at+b$. Wstawiając tę funkcję do równania (5) otrzymujemy $a = 1/3$ oraz $b = 2/9$ skąd rozwiązanie ogólne jest postaci

$$x = \mathrm{e}^t \left(C_1 \sin(t\sqrt{2}) + C_2 \cos(t\sqrt{2}) \right) + \frac{3t+2}{9}.$$

Zadanie 3 Dany jest układ rówań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mathrm{e}^{x_1} - x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 - x_1 - x_2 \end{cases} \tag{8}$$

(a) Znaleźć wszystkie równowagi (odpowiedź uzasadnić).

(b) Zbadać stabilność równowag.

Rozwiązanie. Przede wszystkim trzeba znaleźć wszystkie równowagi. W tym celu szukamy wszystkich punktów krytycznych pola wektorowego, tj. rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{e}^{x_1} - x_2 \\ 0 = 1 - x_1 - x_2 \end{cases} \tag{9}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $x_2 = \mathrm{e}^{x_1}$. Wstawiając to do drugiego równania otrzymujemy

$$h(x_1) = 1 - x_1 - \mathrm{e}^{x_1} = 0. \tag{10}$$

Nietrudno zauważyć, że funkcja h jest ciągła oraz w $-\infty$ dąży do $+\infty$ a w $+\infty$ dąży do $-\infty$ stąd musi isntieć przynajmniej jedno rozwiązanie. Co więcej funkcja ta jest monotonicznie malejąca (np. policzyć pochodną). Zatem równowaga może być tylko jedna. Łatwo zauważyć, że $x_1 = 0$ spełnia to równanie. Konsekwentnie jedyna równowaga to $\hat{\mathbf{x}} = (0, 1)$.

Aby zbadać stabilność tej równowagi obliczamy linearyzację pola (8) otrzymując

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz w punkcie } \hat{\mathbf{x}} \quad Df(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Teraz wystarczy policzyć wartości własne macierzy $Df(\hat{\mathbf{x}})$. Otrzymujemy $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ oraz $\lambda_2 = \sqrt{2}$ a zatem równowaga jest niestabilna (punkt siodłowy).

Zadanie 4 Dany jest układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases} \tag{12}$$

(a) Znaleźć rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie. Zaczynamy od obliczenia wartości własnych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Obliczenia te wykonujemy standardowo otrzymując jedną wartość własną $\lambda = 1$ o krotności algebraicznej 2. Następnie obliczamy wektory własne. Ponownie obliczenia te są standardowe i w ich wyniku otrzymujemy jeden wektor własny $h_1 = [1, -2]$. Aby uzyskać rozwiązanie konieczne jest znalezienie drugiego rozwiązania niezależnego. W tym celu szukamy serii związanej z wartością własną λ, tj. szukamy wektora h_2 spełniającego $Ah_2 = \lambda h_2 + h_1$. Obliczenia są standardowe a przykładowy wektor spełniający to równanie to $h_2 = [0, -1]$. Ostatecznie rozwiązanie jest postaci

$$\mathbf{x} = e^t \left(C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right).$$

Zadanie 5 Dana jest funkcja $x(t)$ spełniająca równanie różniczkowe $\ddot{x} - (1 - t + x)^2 = 0$.

(a) Czy funkcja ta ma minimum a jeżeli tak to gdzie? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnić.

Rozwiązanie. Z równania wynika, że druga pochodna funkcji jest nieujemna, stąd funkcja musi być wypukła, ale niekoniecznie ściśle wypukła. Przykładowo funkcja $x = t - 1$ spełnia równanie i nie ma minimum.