Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Mat. / 27 kwietnia 2009r.

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Niech dane będzie równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = t^2 + 1. \tag{1}$$

(a) Znaleźć rozwiązanie powyższego równania dla warunków brzegowych postaci $x(0) = -1$ i $x(-1) = 1$.

Rozwiązanie. W pierwszym kroku rozwiązujemy równanie jendorodne postaci

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = 0. \tag{2}$$

Wielomian charakterystyczny jest postaci

$$w(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2), \tag{3}$$

skąd otrzymujemy $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$ i konsekwentnie rozwiązanie równania jednorodnego (2) jest postaci

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-2t}, \tag{4}$$

gdzie C_i, $i = 1, 2$ są dowolnymi stałymi.

Aby otrzymać rozwiązanie równania niejednorodnego (1) używamy funkcji testowej postaci $y(t) = at^2 + bt + c$, a więc mamy $\dot{y}(t) = 2at + b$ oraz $\ddot{y}(t) = 2a$. Wstawiając to do równania niejednorodnego (1) otrzymujemy równanie postaci

$$2a + 2at + b - 2(at^2 + bt + c) = t^2 + 1, \tag{5}$$

skąd przekształcając otrzymujemy

$$-2at^2 + (2a - 2b)t + (2a + b - 2c) = t^2 + 1. \tag{6}$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach otrzymujemy układ równań liniowych postaci

$$\begin{aligned} -2a &= 1 \\ 2a - 2b &= 0 \\ 2a + b - 2c &= 1 \end{aligned}$$

co prowadzi do rozwiązania postaci $a = -1/2$, $b = -1/2$ i $c = -5/4$ i w konsekwencji rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1) jest postaci

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{4}\right). \tag{7}$$

Wstawiając warunki brzegowe do rozwiązania (7) otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - \frac{5}{4} &= -1 \\ C_1 \mathrm{e}^{-1} + C_2 \mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{4} &= 1 \end{aligned}$$

skąd obliczamy

$$C_1 = \frac{\mathrm{e}^3 - 9\mathrm{e}}{4\mathrm{e}^3 - 4} \qquad \text{i} \qquad C_2 = \frac{9\mathrm{e} - 1}{4\mathrm{e}^3 - 4}$$

■

Zadanie 2 Dla pewnego towaru funkcja popytu w zależości od ceny jest dana jako $P(p) = 1/p$ a funkcja podaży jako $S(p) = \alpha p$, gdzie $\alpha > 0$ oraz zakładamy, że cena $p > 0$. Cena na rynku dostosowuje się zgodnie z równaniem różniczkowym opartmy o nadwyżkę popytu postaci

$$\dot{p}(t) = D(p(t)) - S(p(t)) = \frac{1}{p(t)} - \alpha p(t). \tag{8}$$

(a) Czy dla dowolnego $\alpha > 0$ istnieje cena równowagi? Dla tych $\alpha > 0$, dla których cena równowagi istnieje, to czy jest ona globalnie asymptotycznie stabilna? (b) Znaleźć rozwiązanie powyższego równania dla warunku początkowego $p(0) = 0$.

Rozwiązanie. Istnienie wynika z faktu, że prawa strona równania (8) jest postaci $(1 - \alpha p^2)/p$ i dla dowolnego $\alpha > 0$ istnieje dodatni pierwiastek równania kwadratowego postaci $\hat{p} = 1/\sqrt{\alpha} > 0$. Dla dowolnych $p < \hat{p}$ prawa strona (8) jest dodatnia a dla $p > \hat{p}$ jest ujemna.

Przekształcamy w następujący sposób równanie (8)

$$\dot{p} = \frac{1}{p} - \alpha p \tag{9}$$

$$\dot{p} = \frac{1 - \alpha p^2}{p} \tag{10}$$

$$\int \frac{p\, dp}{1 - \alpha p^2} = \int dt \tag{11}$$

$$-\frac{1}{2\alpha} \ln(1 - \alpha p^2) = t + K \quad (\text{podstawienie } s = 1 - \alpha p^2) \tag{12}$$

$$p = \sqrt{\frac{1 - C\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{\alpha}}, \tag{13}$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest stałą. Dla warunku początkowego $p(0) = 0$ mamy

$$0 = \sqrt{\frac{1 - C}{\alpha}} \Rightarrow C = 1, \tag{14}$$

skąd ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie szczególne postaci

$$p = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}}{\alpha}}. \tag{15}$$

W szczególności jest jasne, że przy $t \uparrow \infty$ mamy $p(t) \to 1/\sqrt{\alpha}$

Zadanie 3 Niech Y_t oznacza dochód narodowy, I_t inwestycje a S_t oszczędności, gdzie $t \in \mathbb{N}$ oznacza czas. Załóżmy, że oszczędności w chwili t są proporcjonalne do dochodu narodowego, tj. zakładamy, że

$$S_t = \alpha Y_t, \qquad \text{gdzie } \alpha > 0. \tag{16}$$

Dodatkowo, zakładamy, że inwestycje w okresie $t + 1$ są proporcjonalne do przyrostu dochodu narodowego, tj. zakładamy, że

$$I_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t), \qquad \text{gdzie } \beta > \alpha > 0. \tag{17}$$

Dodatkowo zakładamy warunek równowagi postaci

$$S_t = I_t. \tag{18}$$

(a) Wyprowadzić równanie różnicowe na Y_t i rozwiązać.

Rozwiązanie. Równanie (17) można przekształcić do postaci

$$I_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t) \tag{19}$$

$$S_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t) \tag{20}$$

$$\alpha Y_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t) \tag{21}$$

skąd rozwiązując ostatnie równanie (21) otrzymujemy

$$Y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y_t. \tag{22}$$

Jest jasne, że rozwiązanie równania (22) jest postaci

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t Y_0. \tag{23}$$

Zadanie 4 Dany jest układ równań różnicowych postaci

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \dfrac{1}{18}\left(5x_1(t) + 2x_2(t)\right) \\ x_2(t+1) = \dfrac{1}{9}\left(5x_2(t) - x_1(t)\right) \end{cases} \tag{24}$$

(a) Podaj rozwiązanie ogólne powyższego układu.

Rozwiązanie. Układ (24) można zapisać w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 5/18 & 1/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \tag{25}$$

gdzie $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy występującej w równaniu (25) otrzymujemy

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

skąd rozwiązanie ogólne układu (24) jest postaci

$$\mathbf{x}(t) = C_1 v^1 \left(\frac{1}{3}\right)^t + C_2 v^2 \left(\frac{1}{2}\right)^t \tag{27}$$

Zadanie 5 Funkcja użyteczności konsumenta jest dana wzorem$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Wiadomo, że przy pewnych cenach p_1 i p_2 oraz bogactwie konsumenta $w = 20$, konsument kupuje koszyk $x_1 = 5$ i $x_2 = 10$. (a) Znaleźć ceny p_1 i p_2. (b) Ile konsument będzie kupował dobra pierwszego, jeżeli jego bogactwo wzrośnie dwa razy?

Rozwiązanie. Konsument rozwiązuje następujące zagadnienie optymalizacji statycznej z ograniczeniami

$$\max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}), \qquad \text{z ograniczeniem } p_1 x_1 + p_2 x_2 = w. \tag{28}$$

Funkcja Lagrange'a jest postaci

$$L(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1 x_2} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) \tag{29}$$

skąd warunki pierwszego rzędu są postaci

$$\frac{x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} = p_1 \lambda \quad \text{i} \quad \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 x_2}} = p_2 \lambda. \tag{30}$$

Dzieląc równania stronami i upraszczając otrzymujemy

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{31}$$

Wstawiając dane liczbowe do ograniczenia oraz do (31) otrzymujemy układ równań liniowych postaci

$$\begin{aligned} p_1 &= 2p_2 \\ 5p_1 + 1 - p_2 &= 20 \end{aligned} \tag{32}$$

skąd mamy $p_1 = 2$ i $p_2 = 1$.

Ponieważ proporcje koszyka zależą tylko od cen więc w przypadku, gdy bogactwo konsumenta wzrośnie dwukrotnie nadal będzie to $x_2 = 2x_1$. Wstawiając to do ograniczenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 40 \\ x_2 &= 2x_1 \end{aligned} \tag{33}$$

skąd $x_1 = 10$ i $x_2 = 20$.