Nazwisko i Imię Rozwiązania **Indeks**

Ekonomia Mat. / 25 kwietnia 2008r.

1	2	3	4	5	6
					×

Zadanie 1 Finansista właśnie zakupił papier wartościowy, który po upływie czasu t będzie mógł sprzedać za $V(t) = 1 + t^2$ gdzie $t \geq 0$. Przechowywanie tego papieru wartościowego w chwili t kosztuje t za jednostkę czasu. Zakładamy ciągły model dyskontowania z nominalną stopą procentową $r < 1/2$.

(a [*2p*]) Wypisać w postaci całki aktualną wartość kosztów przechowywania papieru przez okres $[0, T]$. (b [*1p*]) Obliczyć aktualną wartość netto (tj. po uwględnieniu kosztów przechowywania) sprzedaży papieru w chwili T. (c [*3p*]) Wyznaczyć optymalny moment sprzedaży papieru wartościowego.

Rozwiązanie.

(a) Przy założonym ciągłym dyskonotowaniu wartość aktualna (presenta value) kosztu przechowywania wyraża się całką

$$\mathrm{PV}(C(T)) = \int_0^T t\mathrm{e}^{-rt}dt. \tag{1}$$

(b) Należy zdyskontować wartość $V(T)$ oraz odjąć aktualną wartość kosztu przechowywania. W rezultacie otrzymuje się

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}(V(T)) - \mathrm{PV}(C(T)) &= \mathrm{e}^{-rT}V(T) - \int_0^T t\mathrm{e}^{-rt}dt \\ &= \mathrm{e}^{-rT}\left(1 + T^2\right) - \int_0^T t\mathrm{e}^{-rt}dt \\ &= e^{-rT}\left(T^2 + 1\right) - \frac{1 - e^{-rT}(rT + 1)}{r^2}.\end{aligned}$$

(c) W celu wyznaczenia optymalnego czasu sprzedaży różniczkujemy $\mathrm{PV}(V(T)) - \mathrm{PV}(C(T))$ otrzymując warunki pierwszego rzędu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}\left(\mathrm{PV}(V(T)) - \mathrm{PV}(C(T))\right) &= 0 \\ e^{-rT}\left(T - r\left(T^2 + 1\right)\right) &= 0,\end{aligned}$$

skąd wyznaczamy optymalny czas sprzedaży

$$T^\star = \frac{\sqrt{1 - 4r^2} + 1}{2r}.$$

Wartość ta jest poprawnie zdefiniowana dla $r < 1/2$.

Zadanie 2 Rynek pewnego towaru jest dany funkcjami podaży $S(P) = 2P^2$ oraz popytu $D(P) = 1 - P$, gdzie P jest ceną. Dopasowywanie się ceny jest opisane równaniem różniczkowym

$$\frac{dP}{dt} = D(P) - S(P), \tag{2}$$

gdzie $P(t)$ jest ceną rynkową w chwili t.

(a [*2p*]) Wykazać istnienie takiej stałej $A \in \mathbb{R}$ dla dowolnej ceny P takiej, że $P > 0$, i $P \neq 1/2$, że spełnione jest równanie

$$\frac{P+1}{1-2P} = A\mathrm{e}^{3t}. \tag{3}$$

(b [*2p*]) Obliczyć dla każdego t cenę $P(t)$ jeżeli $P(0) = P_0$ i $P_0 > 0$ oraz $P_0 \neq 1/2$. (c [*2p*]) Pokazać, że dla takich warunków początkowych zachodzi $\lim_{t\to\infty} P(t) = \bar{P}$ oraz wykazać, że $\bar{P}$ jest ceną czyszczącą rynek.

Rozwiązanie. To zadanie można zrobić na dwa sposoby. Przedstawiony jest sposób bardziej obliczeniowy i polega na rozwiązaniu równania (2). Drugi sposób polega na sprawdzeniu czy (3) jest rozwiązaniem równania (2) – jest.

(a) Rozwiązujemy równanie (2).

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= D(P) - S(P) \\
\frac{dP}{dt} &= 1 - P - 2P^2 \\
\int \frac{dP}{1-P-2P^2} &= \int dt \\
\int \frac{dP}{(1+P)(1-2P)} &= t + K \\
\frac{1}{3}\int \frac{dP}{1+P} - \frac{1}{3}\int \frac{-2dP}{1-2P} &= t + K \quad \text{(rozkład na ułamki proste)} \\
\frac{1}{3}\ln|1+P| - \frac{1}{3}\ln|1-2P| &= t + K \\
\ln\left|\frac{1+P}{1-2P}\right|^{1/3} &= t + K \\
\frac{1+P}{1-2P} &= C\mathrm{e}^{3t} \quad \text{(inna stała } C \in \mathbb{R}\text{)}.
\end{aligned}$$

(b) Z ostatniego równania możemy wyznaczyć

$$P(t) = \frac{C\mathrm{e}^{3t} - 1}{1 + C\mathrm{e}^{3t}},$$

i dla warunków początkowych $C = (1+P_0)/(1-2P_0)$.

(c) Mamy $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1/2$ i $D(1/2) = S(1/2)$.

Zadanie 3 Rynek dobra jest charakteryzowany funkcją popytu $D_t = \alpha - \beta P_t$, gdzie $\alpha, \beta > 0$, oraz fukcją podaży $S_t = -\gamma + \delta(P_{t-1} + P_t)/2$, gdzie $\gamma, \delta > 0$, oraz P_t jest ceną w okresie t. Zakładamy, że w każdym okresie rynek znajduje się w równowadze, tj. $S_t = D_t$.

(a [*4p*]) Zapisać równanie różnicowe opisujące zachowanie się ceny w czasie i wyznaczyć rozwiązanie dla dowolnej ceny początkowej P_0. (b [*2p*]) Zbadać zbieżność rozwiązania.

Rozwiązanie.

(a) Ponieważ rynek jest w równowadze więc $D_t = S_t$ dla dowolnego t stąd

$$\begin{aligned} \alpha - \beta P_t &= -\gamma + \delta(P_{t-1} + P_t)/2 \\ (2\beta + \delta)P_t + \delta P_{t-1} - 2(\alpha + \delta) &= 0. \end{aligned}$$

Równowaga p wynosi $p = (\alpha+\gamma)/(\beta+\delta)$. Wprowadzając nową zmienną $x_t = P_t - (\alpha+\gamma)/(\beta+\delta)$ otrzymujemy równanie jednorodne postaci

$$(2\beta + \delta)x_t + \delta x_{t-1} = 0,$$

którego rozwiązanie to $x_t = C(-\delta/(2\beta + \delta))^t$. Stąd rozwiązaniem ogólnym jest

$$P_t = C\left(-\frac{\delta}{2\beta + \delta}\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

(b) Ponieważ $\beta, \delta > 0$ zatem $0 < \delta/(2\beta + \delta) < 1$ i w konsekwencji $\lim_{t\to\infty} P_t = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$.

Zadanie 4 Niech dane będzie równanie różniczkowe postaci

$$y'' - 2y' + 2 = 0. \tag{4}$$

(a [*6p*]) Znaleźć rozwiązanie rzeczywiste powyższego równania dla warunków początkowych $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.

Rozwiązanie.

(a) Rozwiązujemy równanie jednorodne $y'' - 2y' = 0$. Wielomian charakterystyczny wynosi $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ skąd $\lambda = 0$ lub $\lambda = 2$. Rozwiązaniem równania jednorodnego jest $y = C_1 + C_2 e^{2t}$. Jako rozwiązanie szczególne przyjmujemy $y = t$. Rozwiązaniem ogólnym jest więc rodzina $y = C_1 + C_2 e^{2t} + t$. Podstawiając warunek początkowy otrzymujemy $C_1 = 3/2$ i $C_2 = -1/2$.

Zadanie 5 Funkcja użyteczności jest postaci $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, gdzie wartość parametru α nie jest znana. Wiadomo, że rozwiązując problem maksymalizacji użyteczności, przy jednakowych cenach obu dóbr, konsument kupi dwa razy więcej drugiego dobra.

(a [*6p*]) Wyznaczyć wartość α.

Rozwiązanie.

(a) Warunek optymalności pierwszego rzędu to

$$\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Obliczając pochodne cząstkowe oraz wiedząc, że $p_1/p_2 = 1$ i $y/x = 2$ otrzymujemy równanie

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$$

skąd $\alpha = 1/3$.